

# **Komplex analytische Kegel und Garben endlich präsentierter graduierter Algebren**

Diplomarbeit am Fachbereich Mathematik  
der Universität Hamburg

Zur Diplom-Hauptprüfung  
im Dezember 2004  
vorgelegt von

Jan Eric Hoffmann



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b> . . . . .	I
<b>Kapitel I. Grundlagen</b> . . . . .	3
§ 1. Allgemeine Bezeichnungen . . . . .	3
§ 2. Darstellbare Funktoren . . . . .	3
2.1. Funktorielle Morphismen . . . . .	4
2.2. Das Yoneda Lemma . . . . .	4
2.3. Darstellbare Funktoren . . . . .	5
2.4. $S$ -Objekte und Basiswechsel . . . . .	7
§ 3. Komplexe Räume über $S$ . . . . .	9
3.1. Komplexe Räume über $S$ . . . . .	9
3.2. Die Funktoren $f^*$ und $f_*$ . . . . .	9
3.3. Das Faserprodukt von komplexen Räumen . . . . .	11
3.4. Der Funktor $F_{\Gamma, n/S}$ . . . . .	12
3.5. Der Funktor $F_{[t_1, \dots, t_n]/S}$ . . . . .	13
3.6. Der Funktor $G_{[t_1, \dots, t_n]/S}$ . . . . .	14
<b>Kapitel II. Das analytische Spektrum</b> . . . . .	15
§ 4. Darstellbarkeit der Funktoren $F_{\mathcal{A}}$ und $G_{\mathcal{A}}$ . . . . .	15
4.1. Endlich präsentierte Algebren . . . . .	15
4.2. Der Funktor $F_{\mathcal{A}}$ . . . . .	17
4.3. Der Funktor $G_{\mathcal{A}}$ . . . . .	19
4.4. Die funktoriellen Isomorphismen $\beta_{\mathcal{A}}$ und $\gamma_{\mathcal{A}}$ . . . . .	20
§ 5. Definition des analytischen Spektrums . . . . .	20
5.1. Der komplexe Raum $\text{Specan}(\mathcal{A})$ . . . . .	21
5.2. Der funktorielle Morphismus $F_{\varphi}$ . . . . .	21
5.3. Der funktorielle Morphismus $G_{\varphi}$ . . . . .	21
5.4. Der Funktor $\mathcal{A} \rightsquigarrow \text{Specan}(\mathcal{A})$ . . . . .	22
§ 6. Grundlegende Eigenschaften . . . . .	24
6.1. Produkte und Basiswechsel . . . . .	24
6.2. Fasern über Punkten des Basisraumes . . . . .	25
§ 7. Spezielle Abbildungen . . . . .	27
7.1. Strukturmorphismus . . . . .	28
7.2. Projektionen . . . . .	28
7.3. Diagonalabbildung . . . . .	28
7.4. Konstante Abbildungen nach $\mathbb{C} \times S$ . . . . .	28

<b>Kapitel III. Komplex analytische Kegel</b> . . . . .	29
§ 8. Kegel in der Kategorie der Mengen . . . . .	29
8.1. Kegel als algebraische Struktur . . . . .	29
8.2. Kegel im $\mathbb{C}^n$ . . . . .	29
§ 9. Komplex analytische Kegel . . . . .	30
9.1. Definition komplex analytischer Kegel . . . . .	30
9.2. Elementweise Multiplikation . . . . .	31
9.3. Die $\mathcal{O}_S$ -Algebra $\mathcal{O}_{X S}$ . . . . .	32
9.4. Morphismen von komplex analytischen Kegeln . . . . .	32
9.5. Produkte von komplex analytischen Kegeln . . . . .	34
<b>Kapitel IV. Die Dualität von Kegeln und graduierten Algebren</b> . . . . .	35
§ 10. Der Funktor $\Phi: (\mathfrak{Alg}_{\mathcal{O}_S}^*)^\circ \rightarrow \mathcal{C}\hat{o}n\mathfrak{e}_{\mathcal{O}_S}$ . . . . .	35
10.1. Die Algebra $\mathcal{O}_S[t]$ und der Ring $\mathbb{C} \times S$ . . . . .	35
10.2. Der assoziierte Kegel einer $\mathcal{O}_S$ -Kegelalgebra . . . . .	36
10.3. Der assoziierte Kegel eines Produktes von $\mathcal{O}_S$ -Kegelalgebren . . . . .	37
10.4. Die Abbildung $\mu_{\mathcal{A}}^\lambda$ . . . . .	38
§ 11. Der Funktor $\Psi: (\mathcal{C}\hat{o}n\mathfrak{e}_{\mathcal{O}_S})^\circ \rightarrow \mathfrak{Alg}_{\mathcal{O}_S}^*$ . . . . .	38
11.1. Die Garbe der homogenen Schnitte . . . . .	38
11.2. Die $\mathcal{O}_S$ -Algebra $\mathcal{B}^X$ . . . . .	38
11.3. Die assoziierte $\mathcal{O}_S$ -Kegelalgebra eines Kegels . . . . .	44
§ 12. Beweis des Dualitätssatzes und Anwendungen . . . . .	45
12.1. Das Axelsson-Magnusson Theorem . . . . .	45
12.2. Die Isomorphie $\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}^X$ . . . . .	46
12.3. Die Isomorphie $X \xrightarrow{\sim} \text{Specan}(\mathcal{A}^X)$ . . . . .	47
12.4. Triviale Kegel und Darstellbarkeit . . . . .	50
12.5. Die Garbe der homogenen Schnitte eines Produktes . . . . .	51
12.6. Approximation von Schnitten . . . . .	52
<b>Kapitel V. Die Dualität von linearen Räumen und kohärenten Moduln</b> . . . . .	55
§ 13. Komplex analytische Gruppen . . . . .	55
13.1. Definition komplex analytischer Gruppen . . . . .	55
13.2. Morphismen von komplex analytischen Gruppen . . . . .	56
13.3. Die assoziierte Gruppe einer $\mathcal{O}_S$ -Bigebrä . . . . .	56
§ 14. Lineare Räume . . . . .	57
14.1. Definition linearer Räume . . . . .	57
14.2. Morphismen von linearen Räumen . . . . .	58
14.3. Die Garbe der homogenen Schnitte eines linearen Raumes . . . . .	58
14.4. Der assoziierte lineare Raum eines $\mathcal{O}_S$ -Modul . . . . .	62
14.5. Das Fischer-Prill Theorem . . . . .	64
14.6. Triviale lineare Räume und Darstellbarkeit . . . . .	67
<b>Literaturverzeichnis</b> . . . . .	69

# Einleitung

Ist  $E$  ein holomorphes Vektorraumbündel über einem komplexen Raum  $S$  vom Rang  $n$ , so bilden die holomorphen Schnitte von  $E$  einen lokal freien  $\mathcal{O}_S$ -Modul vom Rang  $n$ . Ist umgekehrt  $\mathcal{E}$  ein lokal freier  $\mathcal{O}_S$ -Modul vom Rang  $n$ , dann gibt es per Definition eine offene Überdeckung  $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  von  $S$  und Isomorphismen  $g_i: \mathcal{E}|_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_S^n|_{U_i}$ . Die Abbildungen

$$g_{ij} := g_i \circ g_j^{-1} \in \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}_S(U_i \cap U_j))$$

erfüllen die Cozykel-Bedingung  $g_{ij} = g_{ik} \circ g_{kj}$  und bestimmen somit ein holomorphes Vektorraumbündel über  $S$  vom Rang  $n$ . Dies ergibt die bekannte Äquivalenz zwischen der Kategorie der holomorphen Vektorraumbündeln über  $S$  vom Rang  $n$  und der Kategorie der lokal freien  $\mathcal{O}_S$ -Moduln vom Rang  $n$  [AF, S. 255].

Lokal freie  $\mathcal{O}_S$ -Moduln sind insbesondere kohärent. Es stellt sich somit die Frage, ob einem kohärenten  $\mathcal{O}_S$ -Modul ein geometrisches Objekt ähnlich zu einem Vektorraumbündel zugeordnet werden kann. Dies ist in der Tat der Fall und führt zum Begriff des linearen Raumes.

Sei  $S$  ein komplexer Raum. Ein linearer Raum über  $S$  ist ein komplexer Raum  $X$  zusammen mit einer holomorphen Abbildung  $\pi: X \rightarrow S$ , so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- (1) Für alle  $x \in X$  trägt die Faser  $X_x := \pi^{-1}(s)$  die Struktur eines komplexen Vektorraumes.
- (2) Die durch die Vektoraddition definierte Abbildung  $X \times_S X \rightarrow X$  und die durch die Multiplikation mit Skalaren definierte Abbildung  $\mathbb{C} \times X \rightarrow X$  sind holomorph.

Lineare Räume wurden unabhängig voneinander zunächst von GROTHENDIECK in [TCGA V] und später von GRAUERT in [Gra62] eingeführt. Während die Definition von GRAUERT mit der oben gegebenen übereinstimmt\*, erfolgt bei GROTHENDIECK die Konstruktion in der Sprache der geringsten Räume und darstellbaren Funktoren. Die gleichen Methoden benutzt GROTHENDIECK in [EGA, I, § 9, S. 354ff], um lineare Räume und weitere geometrische Konstruktionen der klassischen algebraischen Geometrie auf die Theorie der Schemata zu verallgemeinern. GROTHENDIECK zeigte in [TCGA V], dass für einen kohärenten  $\mathcal{O}_S$ -Modul  $\mathcal{F}$  der Funktor

$$(T, \pi) \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T}(\pi^* \mathcal{F}, \mathcal{O}_T)$$

von der Kategorie der komplexen Räume über  $S$  in die Kategorie der Mengen darstellbar ist und die Darstellung durch einen linearen Raum gegeben ist. Man erhält so einen (kontravarianten) Funktor  $\mathbf{V}$  von der Kategorie der kohärenten  $\mathcal{O}_S$ -Moduln in die Kategorie der linearen Räume.

---

\*Lineare Räume gemäß unserer Definition werden bei Grauert als quasi-lineare Räume bezeichnet. Lineare Räume sind bei Grauert die darstellbaren linearen Räume im Sinne von Fischer.

Ein linearer Raum, welcher lokal isomorph zu einem Unterraum eines trivialen linearen Raumes ist, wird darstellbar genannt. In [Fis67] zeigte FISCHER, dass für einen darstellbaren linearen Raum  $X$  über einem komplexen Raum  $S$  die Garbe der Linearformen  $\mathcal{L}_X$  kohärent und  $V(\mathcal{L}_X)$  isomorph zu  $X$  ist. Dies ergibt eine Dualität zwischen der Kategorie der darstellbaren linearen Räumen über  $S$  und der Kategorie der kohärenten  $\mathcal{O}_S$ -Moduln. FISCHER vermutete, dass jeder lineare Raum über  $S$  darstellbar sei. Für den Fall, dass  $X$  reduziert und die Faserdimension von  $\mathcal{L}_X$  konstant ist, wurde dies bereits in [Fis66] gezeigt. Der allgemeine Fall konnte kurze Zeit später von PRILL in [Pri68] bewiesen werden. Man erhält also den folgenden Dualitätssatz:

**THEOREM (Fischer-Prill).** *Es sei  $S$  ein komplexer Raum. Dann sind die Kategorie der linearen Räume über  $S$  und die Kategorie der kohärenten  $\mathcal{O}_S$ -Moduln zueinander dual.*

Die Dualität von linearen Räumen über  $S$  und kohärenten  $\mathcal{O}_S$ -Moduln lässt sich weiter verallgemeinern. Der folgende Dualitätssatz wurde in [AM86] von AXELSSON und MAGNUSSON bewiesen:

**THEOREM (Axelsson-Magnusson).** *Es sei  $S$  ein komplexer Raum. Dann sind die Kategorie der komplex analytischen Kegel über  $S$  und die Kategorie der endlich präsentierten graduierten  $\mathcal{O}_S$ -Algebren zueinander dual.*

Ziel dieser Arbeit ist die Ausarbeitung und Präsentation dieses Ergebnisses. Wir gehen dabei wie folgt vor:

Im ersten Kapitel werden zunächst einige Grundlagen zusammengestellt. Im Mittelpunkt stehen der Begriff des darstellbaren Funktors und die Kategorie der komplexen Räume über einem Basisraum. Gegenstand des zweiten Kapitels ist das analytische Spektrum. Hauptquelle ist der Vortrag von HOUZEL [Hou61] im E.N.S. Seminar von CARTAN aus dem Jahre 1961. Die Darstellung ist ausführlicher als in HOUZEL, beschränkt sich aber auf die im Folgenden benötigten Resultate. So wird z.B. nicht näher auf das analytische Spektrum im Falle einer kohärenten  $\mathcal{O}_S$ -Algebra eingegangen. Der Begriff des komplex analytischen Kegels über einem Basisraum wird im dritten Kapitel eingeführt. Dabei wird ähnlich vorgegangen, wie bei der Definition von Gruppenschemata. Zunächst werden Kegel als algebraische Struktur in der Kategorie der Mengen definiert. Diese Definition wird dann mittels Reduktion auf  $\mathbb{C}ns$  auf die Kategorie der komplexen Räume über  $S$  übertragen. Im vierten Kapitel wird bewiesen, dass die Kategorie der komplex analytischen Kegel über  $S$  dual zur Kategorie der endlich präsentierten graduierten  $\mathcal{O}_S$ -Algebren ist. Die Darstellung orientiert sich an der Originalarbeit von AXELSSON und MAGNUSSON [AM86], wobei Beweise ergänzt und, wo es sinnvoll erschien, neu strukturiert wurden. Insbesondere wurde der Teil im Beweis des Dualitätssatzes, welcher in [AM86] nur skizziert ist, detailliert ausgearbeitet. Im fünften und letzten Kapitel wird die Dualität von linearen Räumen über  $S$  und kohärenten  $\mathcal{O}_S$ -Moduln gezeigt. Grundlage ist dabei nicht der Originalbeweis von FISCHER und PRILL [Fis67, Pri68], sondern der von AXELSSON und MAGNUSSON skizzierte Beweis in [AM86].

Ich möchte mich an dieser Stelle ganz herzlich bei Herrn Prof. Dr. OSWALD RIEMENSCHNEIDER für die freundliche und motivierende Betreuung bedanken. Außerdem danke ich allen, die mich während des Studiums unterstützt haben. Ganz besonderes danke ich meiner Familie für ihre Unterstützung und Geduld.

## KAPITEL I

# Grundlagen

In diesem Kapitel stellen wir einige Grundlagen zusammen, die für das Verständnis dieser Arbeit besonders wichtig sind.

### § 1. Allgemeine Bezeichnungen

Alle Ringe sind, soweit nicht anders angegeben, kommutative Ringe mit Eins. Wir bezeichnen mit  $\mathfrak{Ens}$  die Kategorie der Mengen zusammen mit ihren Abbildungen. Ist  $\mathfrak{C}$  eine Kategorie, so bezeichnen wir mit  $\mathfrak{C}^\circ$  die duale Kategorie. Für einen kontravarianten Funktor  $F$  von einer Kategorie  $\mathfrak{C}_1$  in eine Kategorie  $\mathfrak{C}_2$  schreiben wir  $F : \mathfrak{C}_1^\circ \rightarrow \mathfrak{C}_2$ .

Ein Morphismus  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  von Prägarben auf einem topologischen Raum  $X$  ist per Definition gegeben durch eine Familie von Homomorphismen

$$\varphi = \left\{ \varphi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U) \right\}_{U \subset X \text{ offen}}$$

zwischen den Schnitten. Für den Homomorphismus  $\varphi_X : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X)$  zwischen den globalen Schnitten unterdrücken wir in der Regel den Index und schreiben  $\varphi : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X)$ .

Ist  $X = (|X|, \mathcal{O}_X)$  ein komplexer Raum, so bezeichnen wir mit  $|X|$  den unterliegenden topologischen Raum und mit  $\mathcal{O}_X$  die Strukturgarbe von  $X$ . Geht die Bedeutung aus dem Kontext hervor, so schreiben wir  $X$  für  $|X|$ . Für  $x \in X$  bezeichnen wir mit  $\mathfrak{m}_{X,x}$  das maximale Ideal von  $\mathcal{O}_{X,x}$ . Ist

$$f = (|f|, \tilde{f}) : (|X|, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (|Y|, \mathcal{O}_Y)$$

eine holomorphe Abbildung, so bezeichnet  $|f| : |X| \rightarrow |Y|$  die stetige Abbildung der unterliegenden topologischen Räume,  $\tilde{f} : \mathcal{O}_Y \rightarrow |f|_* \mathcal{O}_X$  den Homomorphismus von Garben von  $\mathbb{C}$ -Algebren und  $\hat{f} : |f|^{-1} \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$  den zu  $\tilde{f}$  adjungierten Homomorphismus. Die Kategorie der komplexen Räume mit holomorphen Abbildungen bezeichnen wir mit  $\mathfrak{Co}$ .

In der Regel schreiben wir  $f_* \mathcal{O}_X$  für  $|f|_* \mathcal{O}_X$  und  $f^{-1} \mathcal{O}_Y$  für  $|f|^{-1} \mathcal{O}_Y$ . Ist  $\mathcal{G}$  ein  $\mathcal{O}_Y$ -Modul, so bezeichnen wir mit  $f^* \mathcal{G} = |f|^{-1} \mathcal{G} \otimes_{|f|^{-1} \mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$  die analytische Urbildgarbe.

Wir schreiben den Raumindex bei Abbildungen an einigen Stellen als Exponenten anstatt als Index. Ist z.B.  $\pi_X : X \rightarrow S$  eine holomorphe Abbildung zwischen komplexen Räumen, so schreiben wir  $\pi_X^* \mathcal{O}_X$  für die topologische Bildgarbe  $|\pi_X|_* \mathcal{O}_X$  und die analytische Bildgarbe  $(\pi_X)_* \mathcal{O}_X$ .

### § 2. Darstellbare Funktoren

Universelle Konstruktionen treten vielfältig in der Mathematik auf. Häufig werden sie durch universelle Pfeile [Mac71, III.] oder adjungierte Funktoren [HiSt, II.8, S. 69]

beschrieben. Gegenstand dieses Abschnittes sind mengenwertige Funktoren, die isomorph zu einem Hom-Funktor sind. Mit ihrer Hilfe lassen sich universelle Konstruktionen sehr elegant beschreiben. Standardreferenzen für den hier präsentierten Inhalt sind [EGA, TCGA IV, SGA<sub>3</sub>, TDTE II]. Des Weiteren finden sich einführende Abschnitte in [TCF], [Sch70] und [LB68].

**2.1. Funktorielle Morphismen.** Seien  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  Kategorien, und  $F, G$  kontravariante Funktoren von  $\mathcal{C}$  nach  $\mathcal{D}$ . Ist für alle Objekte  $T$  aus  $\mathcal{C}$  eine Abbildung  $\Phi(T): F(T) \rightarrow G(T)$  gegeben und ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(T) & \xrightarrow{\Phi(T)} & G(T) \\ F(f) \uparrow & & \uparrow G(f) \\ F(T') & \xrightarrow{\Phi(T')} & G(T') \end{array} \quad (2.1.a)$$

für alle Morphismen  $f: T \rightarrow T'$  aus  $\mathcal{C}$  kommutativ, dann heißt  $\Phi: F \rightarrow G$  ein *funktorieller Morphismus*. Ein funktorieller Morphismus wird häufig auch als natürliche Transformation bezeichnet. Ist  $H$  ein weiterer Funktor und  $\Psi: G \rightarrow H$  ein funktorieller Morphismus, dann ist durch  $(\Psi \circ \Phi)(T) := \Psi(T) \circ \Phi(T)$  für alle Objekte  $T$  aus  $\mathcal{C}$  die *Komposition* von  $\Phi$  und  $\Psi$  erklärt.

Ein funktorieller Morphismus  $\Phi: F \rightarrow G$  ist ein *funktorieller Isomorphismus*, wenn  $\Phi(T)$  für alle Objekte  $T$  aus  $\mathcal{C}$  ein Isomorphismus in  $\mathcal{D}$  ist. Dies ist gleichbedeutend damit, dass es einen eindeutig bestimmten funktoriellen Morphismus  $\Psi: G \rightarrow F$  gibt, so dass  $\Psi \circ \Phi = \text{id}_F$  und  $\Phi \circ \Psi = \text{id}_G$  ist [TCF, 1.5. S. 11].

Sind  $F$  und  $G$  Funktoren zwischen zwei Kategorien, so bezeichnen wir die *Klasse der funktoriellen Morphismen*  $F \rightarrow G$  mit  $\underline{\text{Hom}}(F, G)$ .

**2.2. Das Yoneda Lemma.** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $X$  ein Objekt aus  $\mathcal{C}$ . Dann ist durch

$$h_X(T) = \text{Hom}(T, X)$$

für Objekte  $T$  aus  $\mathcal{C}$  und

$$h_X(f) : \begin{cases} h_X(T') & \longrightarrow & h_X(T) \\ \phi & \longmapsto & \phi \circ f \end{cases} \quad (2.2.a)$$

für Morphismen  $f: T \rightarrow T'$  aus  $\mathcal{C}$  ein kontravarianter Funktor  $h_X: \mathcal{C}^\circ \rightarrow \mathcal{E}ns$  von der Kategorie  $\mathcal{C}$  in die Kategorie der Mengen definiert. Ist  $F: \mathcal{C}^\circ \rightarrow \mathcal{E}ns$  ein Funktor, so haben wir eine kanonische Abbildung

$$\alpha : \begin{cases} \underline{\text{Hom}}(h_X, F) & \longrightarrow & F(X) \\ \Phi & \longmapsto & [\Phi(X)](\text{id}_X) \end{cases} \quad (2.2.b)$$

Umgekehrt erhalten wir eine Abbildung  $\beta: F(X) \rightarrow \underline{\text{Hom}}(h_X, F)$ , indem wir jedem  $\xi \in F(X)$  den folgenden funktoriellen Morphismus zuordnen:

$$(\beta(\xi))(T) : \begin{cases} h_X(T) & \longrightarrow & F(T) \\ \phi & \longmapsto & (F(\phi))(\xi) \end{cases} \quad (2.2.c)$$

**THEOREM\* 2.2.1 (Yoneda-Lemma).** *Es sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie,  $X$  ein Objekt aus  $\mathcal{C}$  und  $F: \mathcal{C}^\circ \rightarrow \mathcal{E}ns$  ein Funktor. Dann sind die Abbildungen  $\alpha: \underline{\text{Hom}}(h_X, F) \rightarrow F(X)$  und  $\beta: F(X) \rightarrow \underline{\text{Hom}}(h_X, F)$  bijektiv und zueinander invers.*

*Beweis.* [EGA, 0, 1.1.4, S. 20], [TCF, Theorem 1.6, S. 12] □

Sei  $\varphi: X \rightarrow Y$  ein Morphismus aus  $\mathcal{C}$ . Dann bezeichnen wir mit  $h_\varphi$  den funktoriellen Morphismus  $h_X \rightarrow h_Y$ , welcher für alle Objekte  $T$  aus  $\mathcal{C}$  durch

$$h_\varphi(T) : \begin{cases} h_X(T) & \longrightarrow & h_Y(T) \\ \phi & \mapsto & \varphi \circ \phi \end{cases} \quad (2.2.d)$$

definiert ist. Ist  $\varphi: h_X \rightarrow h_Y$  ein funktorieller Morphismus und setzen wir  $\varphi := \alpha(\Phi)$ , dann gilt für alle Objekte  $T$  aus  $\mathcal{C}$  und alle  $\phi \in h_X(T)$ :

$$\begin{aligned} [\Phi(T)](\phi) &= [(\beta(\alpha(\Phi)))(T)](\phi) = [(\beta(\varphi))(T)](\phi) \\ &\stackrel{(2.2.c)}{=} [h_X(\phi)](\varphi) \stackrel{(2.2.a)}{=} \varphi \circ \phi \end{aligned}$$

Wir können daher ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass jeder funktorielle Morphismus  $h_X \rightarrow h_Y$  von der Form  $h_\varphi$  mit geeignetem  $\varphi: X \rightarrow Y$  ist.

**KOROLLAR 2.2.2.** *Es sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie, und seien  $X, Y, Z$  Objekte aus  $\mathcal{C}$ . Dann gilt für alle funktoriellen Morphismen  $h_\varphi: h_X \rightarrow h_Y$  und  $h_\psi: h_Y \rightarrow h_Z$ :*

$$h_\psi \circ h_\varphi = h_{\psi \circ \varphi}$$

**KOROLLAR 2.2.3.** *Es sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie, und seien  $X, Y$  Objekte aus  $\mathcal{C}$ . Ein funktorieller Morphismus  $h_\varphi: h_X \rightarrow h_Y$  ist genau dann ein Isomorphismus, wenn  $\varphi: X \rightarrow Y$  ein Isomorphismus in  $\mathcal{C}$  ist.*

**2.3. Darstellbare Funktoren.** Es sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie. Ein Funktor  $F: \mathcal{C}^\circ \rightarrow \mathcal{E}ns$  heißt *darstellbar*, wenn es Paar ein  $(X, \xi)$  gibt, welches aus einem Objekt  $X$  von  $\mathcal{C}$  und einem Element  $\xi \in F(X)$  besteht, so dass  $\beta(\xi): h_X \rightarrow F$  ein funktorieller Isomorphismus ist.

**SATZ 2.3.1.** *Es seien  $F, G: \mathcal{C}^\circ \rightarrow \mathcal{E}ns$  darstellbare Funktoren mit Darstellungen  $(X, \xi_X)$  und  $(Y, \xi_Y)$ . Dann gibt es für alle funktoriellen Morphismen  $\Phi: F \rightarrow G$  einen eindeutig bestimmten Morphismus  $\varphi: X \rightarrow Y$  mit der Eigenschaft:*

$$[\Phi(X)](\xi_X) = (G(\varphi))(\xi_Y) \quad (2.3.a)$$

*Beweis.* Aufgrund der Darstellbarkeit von  $F$  und  $G$  induziert  $\Phi$  einen funktoriellen Morphismus  $h_\varphi: h_X \rightarrow h_Y$ , welcher gegeben ist durch

$$(\beta(\xi_Y))^{-1} \circ \Phi \circ \beta(\xi_X).$$

Das bedeutet, wir haben das folgende kommutative Diagramm von funktoriellen Morphismen:

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\Phi} & G \\ \beta(\xi_X) \uparrow \wr & & \wr \uparrow \beta(\xi_Y) \\ h_X & \xrightarrow{h_\varphi} & h_Y \end{array} \quad (2.3.b)$$

Die folgende Rechnung zeigt, dass der Morphismus  $\varphi: X \rightarrow Y$ , welcher  $h_\varphi$  induziert, die geforderte Eigenschaft (2.3.a) hat:

$$\begin{aligned} [\Phi(X)](\xi_X) &= [\Phi(X)](\alpha(\beta(\xi_X))) \stackrel{(2.2.b)}{=} [\Phi(X) \circ (\beta(\xi_X))(X)](\text{id}_X) \\ &\stackrel{(2.3.b)}{=} [(\beta(\xi_Y))(X) \circ h_\varphi(X)](\text{id}_X) \stackrel{(2.2.d)}{=} [(\beta(\xi_Y))(X)](\varphi) \\ &\stackrel{(2.2.c)}{=} (G(\varphi))(\xi_Y) \quad \square \end{aligned}$$

*Bezeichnung.* Es seien die Bezeichnungen wie in Korollar 2.3.1. Dann definieren wir:  $\Phi^\vee := \varphi$ .

**KOROLLAR 2.3.2.** *Es sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie, und seien  $F, G, H: \mathcal{C}^\circ \rightarrow \mathfrak{Ens}$  darstellbare Funktoren mit Darstellungen  $(X, \xi_X)$ ,  $(Y, \xi_Y)$  und  $(Z, \xi_Z)$ . Dann gilt für alle funktoriellen Morphismen  $\Phi: F \rightarrow G$  und  $\Psi: G \rightarrow H$ :*

$$(\Psi \circ \Phi)^\vee = \Psi^\vee \circ \Phi^\vee$$

*Beweis.* Sei  $\varphi := \Phi^\vee$  und  $\psi := (\Psi)^\vee$ . Dann haben wir, entsprechend den Ausführungen im Beweis von Satz 2.3.1, das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} F & \xrightarrow{\Phi} & G & \xrightarrow{\Psi} & H \\ \beta(\xi_X) \uparrow \wr & & \wr \uparrow \beta(\xi_Y) & & \wr \uparrow \beta(\xi_Z) \\ h_X & \xrightarrow{h_\varphi} & h_Y & \xrightarrow{h_\psi} & h_Z \end{array}$$

Die Aussage folgt somit aus der Definition eines funktoriellen Morphismus und Korollar 2.2.2.  $\square$

**KOROLLAR 2.3.3.** *Es sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie, und seien  $F, G: \mathcal{C}^\circ \rightarrow \mathfrak{Ens}$  darstellbare Funktoren mit Darstellungen  $(X, \xi_X)$  und  $(Y, \xi_Y)$ . Ein funktorieller Morphismus  $\Phi: F \rightarrow G$  ist genau dann ein Isomorphismus, wenn  $\Phi^\vee: X \rightarrow Y$  ein Isomorphismus in  $\mathcal{C}$  ist.*

**KOROLLAR 2.3.4.** *Es sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $F: \mathcal{C}^\circ \rightarrow \mathfrak{Ens}$  ein darstellbarer Funktor mit Darstellungen  $(X, \xi_X)$  und  $(Y, \xi_Y)$ . Dann existiert ein eindeutig bestimmter Isomorphismus  $\varphi: X \rightarrow Y$ , so dass  $\xi_X = (F(\varphi))(\xi_Y)$ .*

*Beweis.* Setzen wir  $G := F$  und  $\Phi := \text{id}_F$  in Satz 2.3.1, dann induziert  $\text{id}_F$  nach Korollar 2.3.3 einen Isomorphismus  $\varphi: X \rightarrow Y$ , und es gilt  $\xi_X = \text{id}_F(\xi_X) = (F(\varphi))(\xi_Y)$ .  $\square$

Aus Korollar 2.3.2 erhalten wir ein Kriterium dafür, dass die darstellenden Objekte einer Klasse von darstellbaren Funktoren funktoriell voneinander abhängen:

**SATZ 2.3.5.** *Es seien  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  Kategorien. Für jedes Objekt  $A$  aus  $\mathcal{D}$  sei ein darstellbarer Funktor  $F_A: \mathcal{C}^\circ \rightarrow \mathfrak{Ens}$  mit Darstellung  $(X_A, \xi_A)$  gegeben, und jedem Morphismus  $\varphi: A \rightarrow B$  aus  $\mathcal{D}$  sei ein funktorieller Morphismus  $f_\varphi: F_B \rightarrow F_A$  zugeordnet, so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:*

- (1)  $f_{\text{id}_A} = \text{id}_{F_A}$  für jedes Objekt  $A$  aus  $\mathcal{D}$ .
- (2)  $f_{\psi \circ \varphi} = f_\varphi \circ f_\psi$  für jede Komposition  $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$  von Morphismen aus  $\mathcal{D}$ .

Dann ist durch  $F(A) = X_A$  für Objekte  $A$  aus  $\mathcal{D}$  und  $F(\varphi) = (f_\varphi)^\vee$  für Morphismen  $\varphi: A \rightarrow B$  aus  $\mathcal{D}$  ein kontravarianter Funktor  $F: \mathcal{D}^\circ \rightarrow \mathfrak{Ens}$  definiert.

*Beweis.* Wir verifizieren, dass obige Definition einen Funktor definiert:

$$\begin{aligned} F(\text{id}_A) &= (f_{\text{id}_A})^\vee = (\text{id}_{F_A})^\vee = \text{id}_X \\ F(\psi \circ \varphi) &= (f_{\psi \circ \varphi})^\vee = (f_\varphi)^\vee \circ (f_\psi)^\vee = F(\varphi) \circ F(\psi) \end{aligned} \quad \square$$

**2.4.  $S$ -Objekte und Basiswechsel.** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $S$  ein Objekt aus  $\mathcal{C}$ . Ein  $S$ -Objekt ist ein Paar  $(X, \pi_X)$ , bestehend aus einem Objekt  $X$  und einem Morphismus  $\pi_X: X \rightarrow S$  aus  $\mathcal{C}$ . Ein  $S$ -Morphismus zwischen zwei  $S$ -Objekten  $(X, \pi_X)$  und  $(Y, \pi_Y)$  ist ein Morphismus  $f: X \rightarrow Y$  aus  $\mathcal{C}$ , so dass das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 \pi_X \searrow & & \swarrow \pi_Y \\
 & S & 
 \end{array}
 \tag{2.4.a}$$

Die  $S$ -Objekte zusammen mit den  $S$ -Morphismen bilden eine Kategorie, welche wir mit  $\mathcal{C}/_S$  bezeichnen. Mit  $\text{Hom}_S(X, Y)$  bezeichnen wir die Menge der  $S$ -Morphismen zwischen zwei  $S$ -Objekten  $(X, \pi_X)$  und  $(Y, \pi_Y)$ .

In der Kategorie  $\mathcal{C}/_S$  ist das Objekt  $(S, \text{id}_S)$  ein Endobjekt, denn  $\text{Hom}_S(T, S)$  besteht, wie aus der Definition eines  $S$ -Morphismus direkt ersichtlich ist, nur aus einem Element. Ist  $e$  ein Endobjekt in  $\mathcal{C}$ , so sind  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{C}/_e$  kanonisch isomorph.

Sei nun  $\mathcal{C}$  eine Kategorie mit Faserprodukten. Dann definiert das Faserprodukt für jedes Objekt  $S$  aus  $\mathcal{C}$  einen Bifunktor [EGA, 0, 1.2.6, S. 27]:

$$\mathcal{C}/_S \times \mathcal{C}/_S \longrightarrow \mathcal{C}/_S$$

Ist  $\varphi: S' \rightarrow S$  ein Morphismus aus  $\mathcal{C}$ , dann ist für jedes  $S$ -Objekt  $(X, \pi_X)$  das Paar  $(X \times_S S', p_2)$  ein  $S'$ -Objekt:

$$\begin{array}{ccc}
 X \times_S S' & \xrightarrow{p_2} & S' \\
 p_1 \downarrow & & \downarrow \varphi \\
 X & \xrightarrow{\pi_X} & S
 \end{array}$$

Dabei bezeichnen  $p_1: X \times_S S' \rightarrow X$  und  $p_2: X \times_S S' \rightarrow S'$  die Projektionen auf den ersten bzw. zweiten Faktor. Indem wir jedem  $S$ -Morphismus  $f$  den  $S'$ -Morphismus  $f \times_S \text{id}_{S'}$  zuordnen, erhalten wir einen Funktor

$$(- \times_S S'): \mathcal{C}/_S \rightarrow \mathcal{C}/_{S'} ,$$

welchen wir auch als *Funktor des Basiswechsels* bezeichnen. Als wichtige Eigenschaft des Basiswechsels notieren wir:

**SATZ\* 2.4.1 (Transitivität des Basiswechsels).** *Es sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie mit Faserprodukten, und seien  $\varphi: S' \rightarrow S$  und  $\psi: S'' \rightarrow S'$  Morphismen aus  $\mathcal{C}$ . Dann gibt es für alle  $S$ -Objekte  $(X, \pi_X)$  einen natürlichen Isomorphismus:*

$$(X \times_S S') \times_{S'} S'' \xrightarrow{\sim} X \times_S S''$$

*Beweis.* [EGA, 0, 1.3.2, S. 31] □

Ist  $\varphi: S' \rightarrow S$  ein Morphismus aus  $\mathcal{C}$ , so haben wir einen kanonischen Funktor  $i_{S'/S}: \mathcal{C}/_{S'} \rightarrow \mathcal{C}/_S$ , welcher jedem  $S'$ -Objekt  $(X', \pi_{X'})$  das  $S$ -Objekt  $(X', \varphi \circ \pi_{X'})$  zuordnet.

SATZ 2.4.2. *Es sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie mit Faserprodukten und  $\varphi: S' \rightarrow S$  ein Morphismus aus  $\mathcal{C}$ . Dann ist der Funktor  $i_{S'/S}: \mathcal{C}_{S'} \rightarrow \mathcal{C}_S$  linksadjungiert zum Funktor  $(- \times_S S'): \mathcal{C}_S \rightarrow \mathcal{C}_{S'}$ . Mit anderen Worten, es gibt einen funktoriellen Isomorphismus*

$$\mathrm{Hom}_{S'}(T, X \times_S S') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_S(i_{S'/S}(T), X) \quad (2.4.b)$$

von Bifunktoren  $(\mathcal{C}_{S'})^\circ \times \mathcal{C}_S \rightarrow \mathbf{Ens}$ .

*Beweis.* Sei  $(T, \pi'_T)$  ein Objekt aus  $\mathcal{C}_{S'}$  und sei  $\pi_T$  das eindeutig bestimmte Element von  $\mathrm{Hom}_S(T, S)$ . Betrachten wir das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} X \times_S S' & \xrightarrow{p_2} & S' \\ \downarrow p_1 & \swarrow f & \nearrow \pi'_T \\ & T & \\ \downarrow & \swarrow \pi_T & \searrow \pi_T \\ X & \xrightarrow{\pi_X} & S \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \varphi \\ S \end{array}$$

Aufgrund der universellen Eigenschaft des Faserproduktes haben wir einen funktoriellen Isomorphismus:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_S(i_{S'/S}(T), X \times_S S') &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_S(i_{S'/S}(T), X) \times \mathrm{Hom}_S(i_{S'/S}(T), S') \\ f &\mapsto (p_1 \circ f, p_2 \circ f) \end{aligned}$$

Die  $S'$ -Morphismen von  $T$  nach  $X \times_S S'$  sind genau die  $S$ -Morphismen  $f$  von  $i_{S'/S}(T)$  nach  $X \times_S S'$  für die  $p_2 \circ f = \pi'_T$  gilt. Die Abbildung  $f \mapsto p_1 \circ f$  definiert somit eine in  $T$  und  $X$  funktorielle Bijektion:

$$\mathrm{Hom}_{S'}(T, X \times_S S') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_S(i_{S'/S}(T), X) \quad \square$$

Sei  $F: (\mathcal{C}_S)^\circ \rightarrow \mathbf{Ens}$  ein Funktor, dann definieren wir die *Restriktion* von  $F$  auf  $\mathcal{C}_{S'}$  durch:

$$F_{/S'} := F \circ i_{S'/S}^\circ: \mathcal{C}_{S'}^\circ \longrightarrow \mathbf{Ens}$$

Der folgende Satz beschreibt, wie sich darstellbare Funktoren bezüglich Restriktion verhalten.

SATZ 2.4.3. *Es sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie mit Faserprodukten,  $S$  ein Objekt aus  $\mathcal{C}$  und  $F: (\mathcal{C}_S)^\circ \rightarrow \mathbf{Ens}$  ein darstellbarer Funktor mit Darstellung  $(X, \xi_X)$ . Dann wird für jedes Objekt  $(S', \pi')$  aus  $\mathcal{C}_{S'}$  der Funktor*

$$F_{/S'}: (\mathcal{C}_{S'})^\circ \longrightarrow \mathbf{Ens}$$

durch

$$(X \times_S S', (F(p_1))(\xi_X))$$

dargestellt, wobei  $p_1: X \times_S S' \rightarrow X$  die Projektion auf den ersten Faktor bezeichnet.

*Beweis.* Da  $F$  nach Voraussetzung darstellbar ist, induziert der funktorielle Isomorphismus  $\beta(\xi_X): h_X \rightarrow F$  einen in  $T$  funktoriellen Isomorphismus:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_S(i_{S'/S}(T), X) &\xrightarrow{\sim} F(i_{S'/S}(T)) = F_{/S'}(T) \\ \phi &\mapsto F(\phi)(\xi_X) \end{aligned}$$

Durch Komposition mit (2.4.b) erhalten wir auf diese Weise einen funktoriellen Isomorphismus

$$\Phi: \begin{cases} \text{Hom}_{S'}(T, X \times_S S') & \xrightarrow{\sim} & F/S(T) \\ f & \mapsto & F(p_1 \circ f)(\xi_X) \end{cases}$$

und es gilt:

$$\alpha(\Phi) = [\Phi(X \times_S S')](\text{id}_{X \times_S S'}) = F(p_1)(\xi_X) \quad \square$$

### § 3. Komplexe Räume über $S$

In diesem Paragraphen führen wir zunächst den Begriff des komplexen Raumes über einem Basisraum ein und erinnern an die Adjunktion von direktem Bild und Urbild. Nach einigen Bemerkungen über das Faserprodukt von komplexen Räumen untersuchen wir die Darstellbarkeit von einigen Funktoren und erhalten so einige konkrete Beispiele für darstellbare Funktoren in der Kategorie der komplexen Räume.

**3.1. Komplexe Räume über  $S$ .** Es sei  $S$  ein komplexer Raum. Ein *komplexer Raum über  $S$*  ist ein  $S$ -Objekt in der Kategorie der komplexen Räume, das heißt ein Paar  $(X, \pi_X)$ , welches aus einem komplexen Raum  $X$  und einer holomorphen Abbildung  $\pi_X: X \rightarrow S$  besteht. Wir nennen  $\pi_X$  die *Projektion* und  $S$  den *Basisraum* von  $X$ . Ein *Morphismus von komplexen Räumen über  $S$*  ist ein  $S$ -Morphismus in der Kategorie der komplexen Räume. Die komplexen Räume über  $S$  bilden zusammen mit den Morphismen von komplexen Räumen über  $S$  eine Kategorie, welche wir mit  $\mathcal{C}_{\mathcal{O}/S}$  bezeichnen.

Der reduzierte Nullpunkt  $e = (\{0\}, \mathbb{C})$  ist ein Endobjekt in der Kategorie der komplexen Räume. Ein komplexer Raum  $X$  ist somit kanonisch isomorph zu  $X \times e$  und kann als komplexer Raum über  $e$  aufgefasst werden.

Ist  $\varphi: (X, \pi_X) \rightarrow (Y, \pi_Y)$  ein Morphismus von komplexen Räumen über  $S$ , so ist  $\varphi$  eine fasertreue Abbildung. Das bedeutet, für alle  $s \in S$  ist die Restriktion auf die Halme  $\varphi_s: X_s \rightarrow Y_s$  wohldefiniert. Ist  $U \subset S$  eine offene Teilmenge, dann gilt:

$$\varphi^{-1}(\pi_Y^{-1}(U)) = (\pi_Y \circ \varphi)^{-1}(U) = \pi_X^{-1}(U)$$

Die Anwendung des Funktors  $\pi_*^Y$  auf  $\tilde{\varphi}: \mathcal{O}_Y \rightarrow \varphi_* \mathcal{O}_X$  ergibt also einen Morphismus  $\pi_*^Y \tilde{\varphi}: \pi_*^Y \mathcal{O}_Y \rightarrow \pi_*^X \mathcal{O}_X$ , welcher gegeben ist durch:

$$(\pi_*^Y \tilde{\varphi})_U = \tilde{\varphi}_{\pi_Y^{-1}(U)}: \mathcal{O}_Y(\pi_Y^{-1}(U)) \longrightarrow \mathcal{O}_X(\pi_X^{-1}(U))$$

**3.2. Die Funktoren  $f^*$  und  $f_*$ .** Seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume und sei  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung. Das direkte Bild  $f_*$  ist ein Funktor von der Kategorie der Garben über  $X$  in die Kategorie der Garben über  $Y$ . Das (topologische) Urbild  $f^{-1}$  ist der zu  $f_*$  linksadjungierte Funktor [EGA, 0, 3.5.3, S. 81]. Wir haben somit einen funktoriellen Isomorphismus von Bifunktoren:

$$\text{Hom}_X(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \xrightleftharpoons[\#]{\flat} \text{Hom}_Y(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

Die Einheit der Adjunktion ist gegeben durch die kanonische Abbildung

$$\rho_{\mathcal{G}}: \mathcal{G} \longrightarrow f_* f^{-1} \mathcal{G},$$

welche einem Schnitt  $s \in \Gamma(U, \mathcal{G})$  den Schnitt  $s \circ f \in \Gamma(f^{-1}(U), f^{-1}\mathcal{G})$  zuordnet. Ist  $v \in \text{Hom}_X(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F})$ , so erhalten wir  $v^\flat: \mathcal{G} \rightarrow f_*\mathcal{F}$  als die Komposition:

$$\mathcal{G} \xrightarrow{\rho_{\mathcal{G}}} f_*f^{-1}\mathcal{G} \xrightarrow{f_*v} f_*\mathcal{F}$$

Seien  $(X, \mathcal{O}_X)$  und  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  komplexe Räume, und sei  $\varphi: X \rightarrow Y$  eine holomorphe Abbildung. Das analytische direkte Bild ist ein Funktor von der Kategorie der  $\mathcal{O}_X$ -Moduln in die Kategorie der  $\mathcal{O}_Y$ -Moduln, welchen wir ebenfalls mit  $\varphi_*$  bezeichnen. Das analytische Urbild  $\varphi^*$  ist der zu  $\varphi_*$  linksadjungierte Funktor [EGA, 0, 4.4.3, S. 100]. Wir haben somit einen funktoriellen Isomorphismus von Bifunktoren:

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\varphi^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \xrightleftharpoons[\#]{\flat} \text{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G}, \varphi_*\mathcal{F})$$

Die Einheit der Adjunktion ist gegeben durch die kanonische Komposition:

$$\mathcal{G} \xrightarrow{\rho_{\mathcal{G}}} \varphi_*\varphi^{-1}\mathcal{G} \xrightarrow{\varphi_*(\text{id} \otimes 1)} \varphi_*(\varphi^{-1}\mathcal{G} \otimes_{\varphi^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X) = \varphi_*\varphi^*\mathcal{G} \quad (3.2.a)$$

Ist  $v \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\varphi^*\mathcal{G}, \mathcal{F})$ , so erhalten wir  $v^\flat: \mathcal{G} \rightarrow \varphi_*\mathcal{F}$  als die Komposition:

$$\mathcal{G} \xrightarrow{\rho_{\mathcal{G}}} \varphi_*\varphi^{-1}\mathcal{G} \xrightarrow{\varphi_*(\text{id} \otimes 1)} \varphi_*\varphi^*\mathcal{G} \xrightarrow{\varphi_*v} \varphi_*\mathcal{F}$$

Insbesondere ist für  $x \in X$  die Abbildung  $(v^\flat)_x: \mathcal{G}_{\varphi(x)} \rightarrow \mathcal{F}_x$  gegeben durch die Komposition:

$$\mathcal{G}_{\varphi(x)} \xrightarrow{\text{id} \otimes 1} \mathcal{G}_{\varphi(x)} \otimes_{\mathcal{O}_{Y, \varphi(x)}} \mathcal{O}_{X, x} \xrightarrow{v_x} \mathcal{F}_x \quad (3.2.b)$$

Für jede  $\mathcal{O}_X$ -Algebra  $\mathcal{A}$  definiert die kanonische Komposition

$$\varphi_*\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \varphi_*\mathcal{A} \longrightarrow \varphi_*(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}) \longrightarrow \varphi_*\mathcal{A}$$

die Struktur einer  $\mathcal{O}_Y$ -Algebra auf  $\varphi_*\mathcal{A}$  [EGA, 0, 4.2.4, S. 95]. Ist  $v: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$  ein Morphismus von  $\mathcal{O}_X$ -Algebren, dann ist  $\varphi_*v: \varphi_*\mathcal{A}_1 \rightarrow \varphi_*\mathcal{A}_2$  ein Morphismus von  $\mathcal{O}_Y$ -Algebren. Das analytische direkte Bild induziert auf diese Weise einen Funktor von der Kategorie der  $\mathcal{O}_X$ -Algebren in die Kategorie der  $\mathcal{O}_Y$ -Algebren. Für jede  $\mathcal{O}_Y$ -Algebra  $\mathcal{B}$  definiert die kanonische Komposition

$$\varphi^*\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \varphi^*\mathcal{B} \xrightarrow{\sim} \varphi^*(\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{B}) \longrightarrow \varphi^*\mathcal{B}$$

die Struktur einer  $\mathcal{O}_X$ -Algebra auf  $\varphi^*\mathcal{B}$  [EGA, 0, 4.3.4, S. 98]. Ist  $u: \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$  ein Morphismus von  $\mathcal{O}_Y$ -Algebren, dann ist  $\varphi^*u: \varphi^*\mathcal{B}_1 \rightarrow \varphi^*\mathcal{B}_2$  ein Morphismus von  $\mathcal{O}_X$ -Algebren. Das analytische Urbild induziert auf diese Weise einen Funktor von der Kategorie der  $\mathcal{O}_Y$ -Algebren in die Kategorie der  $\mathcal{O}_X$ -Algebren.

Für einen Morphismus  $v: \varphi^*\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  von  $\mathcal{O}_X$ -Algebren ist  $v^\flat: \mathcal{B} \rightarrow \varphi_*\mathcal{A}$  ein Morphismus von  $\mathcal{O}_Y$ -Algebren, und für einen Morphismus  $u: \mathcal{B} \rightarrow \varphi_*\mathcal{A}$  von  $\mathcal{O}_Y$ -Algebren ist  $u^\sharp: \varphi^*\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  ein Morphismus von  $\mathcal{O}_X$ -Algebren. Dies induziert einen funktoriellen Isomorphismus von Bifunktoren [EGA, 0, 4.4.7, S. 102]:

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_X\text{-alg}}(\varphi^*\mathcal{B}, \mathcal{A}) \xrightleftharpoons[\#]{\flat} \text{Hom}_{\mathcal{O}_Y\text{-alg}}(\mathcal{B}, \varphi_*\mathcal{A}) \quad (3.2.c)$$

**3.3. Das Faserprodukt von komplexen Räumen.** Die Kategorie der komplexen Räume ist eine Kategorie mit endlichen Faserprodukten (siehe z.B. [TCGA III, 2.1.a, S. 4], [CAG, 0.32, S. 29]).

Sei  $S$  ein komplexer Raum und seien  $(X, \pi_X)$  und  $(Y, \pi_Y)$  komplexe Räume über  $S$ . Der unterliegende topologische Raum des Faserproduktes von  $X$  und  $Y$  bezüglich der Abbildungen  $\pi_X$  und  $\pi_Y$  ist das Faserprodukt der unterliegenden topologischen Räume  $|X|$  und  $|Y|$ :

$$|X| \times_{|S|} |Y| = \{(x, y) \in |X| \times |Y| : \pi_X(x) = \pi_Y(y)\}$$

Seien  $f: X \rightarrow X'$  und  $g: Y \rightarrow Y'$  Morphismen von komplexen Räumen über  $S$ . Dann existiert eine eindeutig bestimmte Abbildung  $f \times_S g: X \times_S Y \rightarrow X' \times_S Y'$ , so dass das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc}
 & X & \xrightarrow{f} & X' \\
 p_1 \nearrow & & & \nwarrow p'_1 \\
 X \times_S Y & \xrightarrow{f \times_S g} & & X' \times_S Y' \\
 p_2 \searrow & & & \nearrow p'_2 \\
 & Y & \xrightarrow{g} & Y'
 \end{array} \quad (3.3.a)$$

Für die Homomorphismen zwischen den Strukturgarben haben wir dann das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_*^X \mathcal{O}_X & \xleftarrow{\pi_*^{X'} \tilde{f}} & \pi_*^{X'} \mathcal{O}_{X'} \\
 \pi_*^X \tilde{p}_1 \swarrow & & \searrow \pi_*^{X'} \tilde{p}'_1 \\
 \pi_*^{X \times_S Y} \mathcal{O}_{X \times_S Y} & \xleftarrow{\pi_*^{X' \times_S Y'} \widetilde{f \times_S g}} & \pi_*^{X' \times_S Y'} \mathcal{O}_{X' \times_S Y'} \\
 \pi_*^Y \tilde{p}_2 \swarrow & & \searrow \pi_*^{Y'} \tilde{p}'_2 \\
 \pi_*^Y \mathcal{O}_Y & \xleftarrow{\pi_*^{Y'} \tilde{g}} & \pi_*^{Y'} \mathcal{O}_{Y'}
 \end{array} \quad (3.3.b)$$

Sind  $X$  und  $Y$  komplexe Räume, so ist das direkte Produkt  $X \times Y$  natürlich isomorph zum Faserprodukt  $X \times_e Y$ , wobei  $e = (\{0\}, \mathbb{C})$  den reduzierten Nullpunkt bezeichnet. Für den Halm der Strukturgarbe  $\mathcal{O}_{X \times Y}$  im Punkt  $(x, y) \in X \times Y$  gilt dann

$$\mathcal{O}_{X \times Y, (x, y)} \simeq \mathcal{O}_{X, x} \hat{\otimes} \mathcal{O}_{Y, y}, \quad (3.3.c)$$

wobei  $\hat{\otimes}$  das analytische Tensorprodukt [AS, III.5, S. 179] bezeichnet. Sind  $f: X \rightarrow X'$  und  $g: Y \rightarrow Y'$  holomorphe Abbildungen, dann haben wir für die eindeutig bestimmte Abbildung  $f \times g: X \times Y \rightarrow X' \times Y'$  im Punkt  $(x, y) \in X \times Y$  das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{O}_{X, x} & \xleftarrow{\tilde{f}_x} & \mathcal{O}_{X', f(x)} \\
 \tilde{p}_{1, (x, y)} \swarrow & & \searrow \tilde{p}'_{1, (f(x), g(y))} \\
 \mathcal{O}_{X \times Y, (x, y)} & \xleftarrow{\widetilde{f \times g}_{(x, y)}} & \mathcal{O}_{X' \times Y', (f(x), g(y))} \\
 \tilde{p}_2 \swarrow & & \searrow \tilde{p}'_{2, (f(x), g(y))} \\
 \mathcal{O}_{Y, y} & \xleftarrow{\tilde{g}_y} & \mathcal{O}_{Y', g(y)}
 \end{array} \quad (3.3.d)$$

Identifizieren wir  $\mathcal{O}_{X' \times Y' / (f(x), g(y))}$  mit dem analytischen Tensorprodukt, so gilt für  $a \hat{\otimes} b \in \mathcal{O}_{X', f(x)} \hat{\otimes} \mathcal{O}_{Y', g(y)}$ :

$$\begin{aligned} \widetilde{f \times g_{(x,y)}}(a \hat{\otimes} b) &= \widetilde{f \times g_{(x,y)}}((a \hat{\otimes} 1) \cdot (1 \hat{\otimes} b)) \\ &= \widetilde{f \times g_{(x,y)}}(\tilde{p}'_{1, (f(x), g(y))}(a) \cdot \tilde{p}'_{2, (f(x), g(y))}(b)) \\ &\stackrel{(3.3,d)}{=} \tilde{p}_{1, (x,y)}(\tilde{f}_x(a)) \cdot \tilde{p}_{2, (x,y)}(\tilde{g}_y(b)) = (\tilde{f}_x(a) \hat{\otimes} 1) \cdot (1 \hat{\otimes} \tilde{g}_y(b)) \\ &= \tilde{f}_x(a) \hat{\otimes} \tilde{g}_y(b) = \tilde{f}_x \hat{\otimes} \tilde{g}_y(a \hat{\otimes} b) \end{aligned}$$

Betrachten wir nun speziell das Produkt  $\mathbb{C} \times X$ . Sei dazu  $\mathcal{O}_{X,x} \simeq K_n/\mathfrak{a}$ , wobei  $K_n = \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_n\}$  die Algebra der konvergenten Potenzreihen in  $n$  Veränderlichen bezeichnet und  $\mathfrak{a}$  ein Ideal aus  $K_n$  ist. Dann ist  $\mathcal{O}_{\mathbb{C},\lambda} \hat{\otimes} \mathcal{O}_{X,x} \simeq K_{n+1}/\mathfrak{a}K_{n+1}$ . Es gilt

$$\mathfrak{a}K_{n+1} = \left\{ \sum_{v=0}^{\infty} a_v T^v \in K_{n+1} : a_v \in \mathfrak{a} \right\}$$

und wir erhalten auf diese Weise einen natürlichen  $\mathcal{O}_{X,x}$ -Algebromorphismus in die Algebra der formalen Potenzreihen [AS, III.5, Satz 4, S. 183]:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C},\lambda} \hat{\otimes} \mathcal{O}_{X,x} \hookrightarrow \mathcal{O}_{X,x}[[T]]$$

Jedes  $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C},\lambda} \hat{\otimes} \mathcal{O}_{X,x}$  lässt sich somit auf eindeutige Weise als Potenzreihe mit Koeffizienten aus  $\mathcal{O}_{X,x}$  schreiben:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{v=0}^{\infty} a_v \cdot T^v = \sum_{v=0}^{\infty} \tilde{p}_{2, (\lambda, x)}(a_v) \cdot (\tilde{p}_{1, (\lambda, x)}(z))^v \\ &= \sum_{v=0}^{\infty} (1 \hat{\otimes} a_v) \cdot (z \hat{\otimes} 1)^v = \sum_{v=0}^{\infty} z^v \hat{\otimes} a_v \end{aligned} \quad (3.3.e)$$

Sei  $S$  ein komplexer Raum und  $(X, \pi_X)$  ein komplexer Raum über  $S$ . Für einen Punkt  $s \in S$  ist die Faser von  $X$  über  $s$  definiert als das Faserprodukt  $X_s := X \times_S \{s\}$ . Dabei bezeichnet  $\{s\}$  den einpunktigen reduzierten komplexen Raum mit Strukturgarbe  $\mathcal{O}_{S,s}/\mathfrak{m}_{S,s} \simeq \mathbb{C}$ . Für den unterliegenden topologischen Raum der Faser gilt:

$$|X_s| = |X| \times_{|S|} |\{s\}| \simeq \{x \in X : \pi_X(x) = s\} = |\pi_X|^{-1}(s)$$

Wir identifizieren daher im Allgemeinen den Raum  $|X_s|$  mit der topologischen Faser  $|\pi_X|^{-1}(s)$ . Ist  $x \in X_s$  ein Punkt aus der Faser, dann gilt für den Halm der Strukturgarbe der Faser im Punkt  $x$  [TCGA V, S. 7]:

$$\mathcal{O}_{X_s, x} \simeq \mathcal{O}_{X, x} / \mathfrak{m}_{S, s} \mathcal{O}_{X, x}$$

**3.4. Der Funktor  $F_{\Gamma, n/S}$ .** Es bezeichne  $S$  einen komplexen Raum. Dann ist durch

$$F_{\Gamma, n/S}(T) = \Gamma(T, \mathcal{O}_T)^n$$

für komplexe Räume  $T$  über  $S$  und

$$F_{\Gamma, n/S}(f): \begin{cases} \Gamma(T', \mathcal{O}_{T'})^n & \longrightarrow \Gamma(T, \mathcal{O}_T)^n \\ (\gamma_1, \dots, \gamma_n) & \longmapsto (\tilde{f}(\gamma_1), \dots, \tilde{f}(\gamma_n)) \end{cases}$$

für Morphismen  $f: T \rightarrow T'$  von komplexen Räumen über  $S$  ein kontravarianter Funktor  $F_{\Gamma, n/S}: (\mathcal{C}\mathcal{O}_S)^\circ \rightarrow \mathcal{C}\mathfrak{ns}$  von der Kategorie der komplexen Räume über  $S$  in die Kategorie der Mengen definiert.

Betrachten wir zunächst den Fall, dass  $S$  der reduzierte Nullpunkt  $e$  ist. Dann haben wir die bekannte Bijektion (siehe z.B. [TCGA III, S. 3], [CAS, I.3.1, S. 22]):

$$\beta_{\Gamma, n/e}(T): \begin{cases} \text{Hom}(T, \mathbb{C}^n) & \xrightarrow{\sim} & \Gamma(T, \mathcal{O}_T)^n \\ \phi & \mapsto & (\tilde{\phi}(z_1), \dots, \tilde{\phi}(z_n)) \end{cases} \quad (3.4.a)$$

Wir behaupten nun, dass diese Bijektion auch funktoriell ist. Das heißt, es ist zu überprüfen, ob für jeden Morphismus von komplexen Räumen  $f: T \rightarrow T'$  das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} h_{\mathbb{C}^n}(T) & \xrightarrow{\beta_{\Gamma, n/e}(T)} & \Gamma(T, \mathcal{O}_T)^n \\ h_{\mathbb{C}^n}(f) \uparrow & & \uparrow F_{\Gamma, n/S}(f) \\ h_{\mathbb{C}^n}(T') & \xrightarrow{\beta_{\Gamma, n/e}(T')} & \Gamma(T', \mathcal{O}_{T'})^n \end{array}$$

Dies folgt jedoch unmittelbar aus der Definition der Komposition von Morphismen von komplexen Räumen. Durch  $\beta_{\Gamma, n/e}: h_{\mathbb{C}^n} \xrightarrow{\sim} F_{\Gamma, n/e}$  ist somit ein funktorieller Isomorphismus definiert. Mit anderen Worten:  $F_{\Gamma, n/e}$  ist darstellbar in der Kategorie der komplexen Räume. Die Darstellung ist gegeben durch das Paar  $(\mathbb{C}^n, (z_1, \dots, z_n))$ , wobei  $z_i: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  die  $i$ -te Koordinatenfunktion bezeichnet.

Es gilt  $(F_{\Gamma, n/e})/S = F_{\Gamma, n/e} \circ i_{S/e}^\circ = F_{\Gamma, n/S}$ . Wir erhalten somit als direkte Anwendung von Satz 2.4.3:

**SATZ 3.4.1.** *Der Funktor  $F_{\Gamma, n/S}: (\mathcal{C}\mathcal{O}/S)^\circ \rightarrow \mathfrak{Cns}$  ist darstellbar und wird durch das Paar  $(\mathbb{C}^n \times S, (\beta_1, \dots, \beta_n))$  dargestellt, wobei  $\beta_i := \tilde{p}_1(z_i)$  die  $i$ -te Koordinatenfunktion bezeichnet.*

Insbesondere haben wir also eine in  $T$  natürliche Bijektion:

$$\beta_{\Gamma, n/S}(T): \begin{cases} \text{Hom}_S(T, \mathbb{C}^n) & \xrightarrow{\sim} & \Gamma(T, \mathcal{O}_T)^n \\ \phi & \mapsto & (\tilde{\phi}(\beta_1), \dots, \tilde{\phi}(\beta_n)) \end{cases} \quad (3.4.b)$$

**3.5. Der Funktor  $F_{[t_1, \dots, t_n]}/S$ .** Es bezeichne  $S$  einen komplexen Raum. Dann ist durch

$$F_{[t_1, \dots, t_n]}/S(T) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_T\text{-alg}}(\mathcal{O}_T[t_1, \dots, t_n], \mathcal{O}_T)$$

für komplexe Räume  $T$  über  $S$  und

$$F_{[t_1, \dots, t_n]}/S(f): \begin{cases} F_{[t_1, \dots, t_n]}/S(T') & \longrightarrow & F_{[t_1, \dots, t_n]}/S(T) \\ \Phi & \mapsto & f^* \Phi \end{cases}$$

für Morphismen  $f: T \rightarrow T'$  von komplexen Räumen über  $S$  ein kontravarianter Funktor  $F_{[t_1, \dots, t_n]}/S: (\mathcal{C}\mathcal{O}/S)^\circ \rightarrow \mathfrak{Cns}$  von der Kategorie der komplexen Räume über  $S$  in die Kategorie der Mengen definiert.

**SATZ 3.5.1.** *Die Funktoren  $F_{[t_1, \dots, t_n]}/S$  und  $F_{\Gamma, n/S}$  sind isomorph.*

*Beweis.* Die Elemente von  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_T\text{-alg}}(\mathcal{O}_T[t_1, \dots, t_n], \mathcal{O}_T)$  sind genau die Einsetzungsmorphismen. Wir erhalten somit für alle komplexen Räume  $T$  über  $S$  die Bijektion:

$$\beta_\Phi(T): \begin{cases} \text{Hom}_{\mathcal{O}_T\text{-alg}}(\mathcal{O}_T[t_1, \dots, t_n], \mathcal{O}_T) & \longrightarrow & \Gamma(T, \mathcal{O}_T)^n \\ \Phi & \mapsto & (\Phi(t_1), \dots, \Phi(t_n)) \end{cases}$$

Wir zeigen nun, dass diese Bijektion auch funktoriell ist. Dazu ist zu zeigen, dass für alle Morphismen  $f: T \rightarrow T'$  von komplexen Räumen über  $S$  das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T\text{-alg}}(\mathcal{O}_T[t_1, \dots, t_n], \mathcal{O}_T) & \xrightarrow{\beta_\Phi(T)} & \Gamma(T, \mathcal{O}_T)^n \\ \uparrow \mathrm{F}_{[t_1, \dots, t_n]/S}(f) & & \uparrow \mathrm{F}_{\Gamma, n/S}(f) \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{T'}\text{-alg}}(\mathcal{O}_{T'}[t_1, \dots, t_n], \mathcal{O}_{T'}) & \xrightarrow{\beta_\Phi(T')} & \Gamma(T', \mathcal{O}_{T'})^n \end{array}$$

Sei  $\Phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{T'}\text{-alg}}(\mathcal{O}_{T'}[t_1, \dots, t_n], \mathcal{O}_{T'})$  und sei  $\gamma_i := \Phi(t_i) \in \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$  für  $i = 1, \dots, n$ , dann ergibt sich folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} (f^* \Phi)(t_i) &= (f^{-1} \Phi \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{O}_T})(t_i \otimes 1) = (f^{-1} \Phi(t_i)) \otimes 1 \\ &= (\Phi(t_i) \circ f) \otimes 1 = (\gamma_i \circ f) \otimes 1 = \hat{f}(\gamma_i \circ f) \\ &= \hat{f} \circ \rho_{\mathcal{O}_{T'}}(\gamma_i) = (f_* \hat{f}) \circ \rho_{\mathcal{O}_{T'}}(\gamma_i) = \tilde{f}(\gamma_i) \quad \square \end{aligned}$$

**KOROLLAR 3.5.2.** *Der Funktor  $\mathrm{F}_{[t_1, \dots, t_n]/S}: (\mathcal{C}\mathcal{O}/S)^\circ \rightarrow \mathbf{Ens}$  ist darstellbar und wird durch das Paar  $(\mathbb{C}^n \times S, \xi_{\mathbb{C}^n \times S})$  dargestellt, wobei  $\xi_{\mathbb{C}^n \times S}$  gegeben ist durch:*

$$\xi_{\mathbb{C}^n \times S}: \begin{cases} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times S}[t_1, \dots, t_n] & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times S} \\ t_i & \mapsto & \mathfrak{z}_i \end{cases} \quad (3.5.a)$$

**3.6. Der Funktor  $\mathrm{G}_{[t_1, \dots, t_n]/S}$ .** Es bezeichne  $S$  einen komplexen Raum. Dann ist durch

$$\mathrm{G}_{[t_1, \dots, t_n]/S}(T) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-alg}}(\mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n], \pi_* \mathcal{O}_T)$$

für komplexe Räume  $(T, \pi)$  über  $S$  und

$$\mathrm{G}_{[t_1, \dots, t_n]/S}(f): \begin{cases} \mathrm{G}_{[t_1, \dots, t_n]/S}(T') & \longrightarrow & \mathrm{G}_{[t_1, \dots, t_n]/S}(T) \\ \Phi & \mapsto & \pi_* \tilde{f} \circ \Phi \end{cases}$$

für Morphismen  $f: (T, \pi_T) \rightarrow (T', \pi_{T'})$  von komplexen Räumen über  $S$  ein kontravarianter Funktor  $\mathrm{G}_{[t_1, \dots, t_n]/S}: (\mathcal{C}\mathcal{O}/S)^\circ \rightarrow \mathbf{Ens}$  von der Kategorie der komplexen Räume über  $S$  in die Kategorie der Mengen definiert.

**SATZ 3.6.1.** *Der Funktor  $\mathrm{G}_{[t_1, \dots, t_n]/S}: (\mathcal{C}\mathcal{O}/S)^\circ \rightarrow \mathbf{Ens}$  ist darstellbar und wird durch das Paar  $(\mathbb{C}^n \times S, \xi_{\mathbb{C}^n \times S}^b)$  dargestellt, wobei  $\xi_{\mathbb{C}^n \times S}^b$  gegeben ist durch:*

$$\xi_{\mathbb{C}^n \times S}^b: \begin{cases} \mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n] & \longrightarrow & \pi_*^{\mathbb{C}^n \times S} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times S} \\ t_i & \mapsto & \mathfrak{z}_i \end{cases} \quad (3.6.a)$$

*Beweis.* Sei  $(T, \pi_T)$  ein komplexer Raum über  $S$ . Dann haben wir einen natürlichen Isomorphismus  $\pi_T^* \mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n] \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_T[t_1, \dots, t_n]$ . Zusammen mit (3.2.c) erhalten wir einen funktoriellen Isomorphismus:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T\text{-alg}}(\mathcal{O}_T[t_1, \dots, t_n], \mathcal{O}_T) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-alg}}(\mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n], \pi_*^T \mathcal{O}_T) \\ &= \mathrm{F}_{[t_1, \dots, t_n]/S}(T) & & = \mathrm{G}_{[t_1, \dots, t_n]/S}(T) \end{aligned}$$

Nach Korollar 3.5.2 ist  $\mathrm{F}_{[t_1, \dots, t_n]/S}$  darstellbar. Somit ist  $\mathrm{G}_{[t_1, \dots, t_n]/S}$  ebenfalls darstellbar und hat die Darstellung  $(\mathbb{C}^n \times S, \xi_{\mathbb{C}^n \times S}^b)$ . Die Abbildung  $\xi_{\mathbb{C}^n \times S}^b$  ist dabei für  $x = (z, s) \in \mathbb{C}^n \times S$  gegeben als die Komposition (vgl. (3.2.b)):

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{S, s}[t_1, \dots, t_n] &\xrightarrow{\mathrm{id} \otimes 1} \mathcal{O}_{S, s}[t_1, \dots, t_n] \otimes_{\mathcal{O}_{S, s}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times S} \simeq \\ &\simeq \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times S}[t_1, \dots, t_n] \xrightarrow{\xi_{\mathbb{C}^n \times S, x}^b} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times S} \quad \square \end{aligned}$$

## Das analytische Spektrum einer endlich präsentierten Algebra

Es sei  $S$  ein komplexer Raum. Ein komplexer Raum  $(X, \pi)$  über  $S$  heißt *endlich*, wenn  $\pi: X \rightarrow S$  eine endliche Abbildung ist. Nach dem Kohärenzsatz für endliche holomorphe Abbildungen [CAS, 1.3.3, S. 64] ist dann  $\pi_*\mathcal{O}_X$  ein kohärenter  $\mathcal{O}_S$ -Modul. Ist  $\mathcal{A}$  eine kohärente  $\mathcal{O}_S$ -Algebra, dann heißt ein endlicher komplexer Raum über  $S$  ein *analytisches Spektrum* von  $\mathcal{A}$ , wenn  $\pi_*\mathcal{O}_X$  isomorph zu  $\mathcal{A}$  ist.

In diesem Kapitel betrachten wir die Verallgemeinerung des analytischen Spektrums auf endlich präsentierte  $\mathcal{O}_S$ -Algebren. Hauptquelle für unsere Darstellung ist [Hou61]. Eine Zusammenfassung der wichtigsten Eigenschaften des (verallgemeinerten) analytischen Spektrums findet sich außerdem in [PR94, 3.3, S. 121].

### § 4. Darstellbarkeit der Funktoren $F_{\mathcal{A}}$ und $G_{\mathcal{A}}$

Wir erläutern zunächst den Begriff der endlich präsentierten Algebra, definieren im Anschluss die Funktoren  $F_{\mathcal{A}}$  und  $G_{\mathcal{A}}$  und zeigen dann ihre Darstellbarkeit.

**4.1. Endlich präsentierte Algebren.** Es bezeichne  $S$  einen komplexen Raum. Ein  $\mathcal{O}_S$ -Modul  $\mathcal{F}$  heißt *endlich präsentiert*, wenn für alle  $s \in S$  eine Umgebung  $U$  von  $s$  existiert, so dass

$$\mathcal{F}|_U \simeq \mathcal{O}_S^n|_U / (f_1, \dots, f_m)$$

ist, wobei  $f_1, \dots, f_m$  Schnitte aus  $\Gamma(U, \mathcal{O}_S^n)$  sind. Wir betrachten nun den entsprechenden Begriff für  $\mathcal{O}_S$ -Algebren:

**DEFINITION 4.1.1.** Eine  $\mathcal{O}_S$ -Algebra  $\mathcal{A}$  heißt *endlich präsentiert*, wenn für alle  $s \in S$  eine Umgebung  $U$  von  $s$  existiert, so dass

$$\mathcal{A}|_U \simeq \mathcal{O}_S|_U[t_1, \dots, t_n] / (f_1, \dots, f_m)$$

ist, wobei  $f_1, \dots, f_m$  Schnitte aus  $\Gamma(U, \mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n])$  sind.

**SATZ 4.1.2.** Seien  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  endlich präsentierte  $\mathcal{O}_S$ -Algebren. Dann ist  $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{B}$  eine endlich präsentierte  $\mathcal{O}_S$ -Algebra.

*Beweis.* Sei  $s \in S$ , dann gibt es eine Umgebung  $U$  von  $s$  und Schnitte  $f_1, \dots, f_m \in \Gamma(U, \mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n])$  und  $g_1, \dots, g_k \in \Gamma(U, \mathcal{O}_S[t_{n+1}, \dots, t_l])$ , so dass

$$\mathcal{A}|_U \simeq \mathcal{O}_S|_U[t_1, \dots, t_n] / (f_1, \dots, f_m)$$

und

$$\mathcal{B}|_U \simeq \mathcal{O}_S|_U[t_{n+1}, \dots, t_l] / (g_1, \dots, g_k)$$

ist. Für das Tensorprodukt gilt dann:

$$(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{B})|_U \simeq \mathcal{A}|_U \otimes_{\mathcal{O}_S|_U} \mathcal{B}|_U \simeq \mathcal{O}_S|_U[t_1, \dots, t_l] / (f_1, \dots, f_m, g_1, \dots, g_k) \quad \square$$

SATZ 4.1.3. *Es sei  $\mathcal{A}$  eine endlich präsentierte  $\mathcal{O}_S$ -Algebra und  $\varphi: S' \rightarrow S$  ein Morphismus von komplexen Räumen. Dann ist  $\varphi^{-1}\mathcal{A}$  eine endlich präsentierte  $\varphi^{-1}\mathcal{O}_S$ -Algebra und  $\varphi^*\mathcal{A}$  eine endlich präsentierte  $\mathcal{O}_{S'}$ -Algebra.*

*Beweis.* Sei  $s' \in S'$  und  $s := \varphi(s')$ . Nach Voraussetzung gibt es eine Umgebung  $U$  von  $s$  und Schnitte  $f_1, \dots, f_m \in \Gamma(U, \mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n])$ , so dass

$$\mathcal{A}|_U \simeq \mathcal{O}_{S|U}[t_1, \dots, t_n]/(f_1, \dots, f_m)$$

ist. Sei  $V := \varphi^{-1}(U)$ , dann sind  $f_1 \circ \varphi, \dots, f_m \circ \varphi \in \Gamma(V, \varphi^{-1}\mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n])$  und es gilt:

$$\begin{aligned} (\varphi^{-1}\mathcal{A})|_V &= \varphi_{|V}^{-1}\mathcal{A}|_U \simeq \varphi_{|V}^{-1}(\mathcal{O}_{S|U}[t_1, \dots, t_n]/(f_1, \dots, f_m)) \\ &\simeq (\varphi^{-1}\mathcal{O}_S)|_V[t_1, \dots, t_n]/(f_1 \circ \varphi, \dots, f_m \circ \varphi) \end{aligned}$$

Für das analytische Urbild gilt:

$$\begin{aligned} (\varphi^*\mathcal{A})|_V &= (\varphi^{-1}\mathcal{A})|_V \otimes_{(\varphi^{-1}\mathcal{O}_S)|_V} \mathcal{O}_{S'|V} \\ &\simeq \varphi_{|V}^{-1}\mathcal{O}_{S|U}[t_1, \dots, t_n]/(f_1 \circ \varphi, \dots, f_m \circ \varphi) \otimes_{\varphi_{|V}^{-1}\mathcal{O}_{S|U}} \mathcal{O}_{S'|V} \\ &\simeq \mathcal{O}_{S'|V}[t_1, \dots, t_n]/(f_1 \circ \varphi \otimes 1, \dots, f_m \circ \varphi \otimes 1) \quad \square \end{aligned}$$

SATZ 4.1.4. *Es sei  $S$  ein komplexer Raum und  $\mathcal{F}$  ein kohärenter  $\mathcal{O}_S$ -Modul. Dann ist die symmetrische Algebra  $S(\mathcal{F})$  von  $\mathcal{F}$  eine endlich präsentierte graduierte  $\mathcal{O}_S$ -Algebra.*

*Beweis.* Sei  $s \in S$ . Dann gibt es nach Voraussetzung eine offene Umgebung  $U \subset S$  von  $s$  und eine exakte Sequenz

$$\ker \varphi \hookrightarrow \mathcal{O}_{S|U}^n \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}|_U \longrightarrow 0,$$

wobei  $\ker \varphi$  von endlich vielen Schnitten aus  $\Gamma(U, \mathcal{O}_S^n)$  erzeugt wird. Anwenden der symmetrischen Algebra ergibt nun die folgende exakte Sequenz [EIS, Proposition A.2.2, S. 577]:

$$\ker \varphi \otimes_{\mathcal{O}_{S|U}} S(\mathcal{O}_{S|U}^n) \longrightarrow \overbrace{S(\mathcal{O}_{S|U}^n)}^{\simeq \mathcal{O}_{S|U}[t_1, \dots, t_n]} \longrightarrow \overbrace{S(\mathcal{F}|_U)}^{= S(\mathcal{F})|_U} \longrightarrow 0 \quad \square$$

SATZ 4.1.5. *Es sei  $\mathcal{A} = \bigoplus_{m \geq 0} \mathcal{A}_m$  eine endlich präsentierte graduierte  $\mathcal{O}_S$ -Algebra mit  $\mathcal{A}_0 = \mathcal{O}_S$ . Dann ist  $\mathcal{A}_m$  für alle  $m \geq 0$  ein kohärenter  $\mathcal{O}_S$ -Modul.*

*Beweis.* Sei  $s \in S$ . Dann gibt es nach Voraussetzung eine offene Umgebung  $U \subset S$  von  $s$  und eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{O}_{S|U}[t_1, \dots, t_n] \xrightarrow{\varphi} \mathcal{A}|_U \longrightarrow 0,$$

wobei  $\mathcal{I}$  ein Ideal in  $\mathcal{O}_{S|U}[t_1, \dots, t_n]$  ist, welches von endlich vielen Schnitten aus  $\Gamma(U, \mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n])$  erzeugt wird. Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $\varphi(t_i)$  für  $i = 1, \dots, n$  homogen und vom Grad  $\geq 1$  ist. Indem wir  $\deg t_i := \deg \varphi(t_i)$  setzen, erhalten wir auf  $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{S|U}[t_1, \dots, t_n]$  eine Graduierung  $\bigoplus_{m \geq 0} \mathcal{F}_m$ , wobei die  $\mathcal{F}_m$  endlich erzeugte freie  $\mathcal{O}_{S|U}$ -Modul sind. Durch die Graduierung wird  $\varphi$  zu einem Morphismus von graduierten  $\mathcal{O}_{S|U}$ -Algebren und  $\mathcal{I}$  zu einem graduierten Ideal  $\mathcal{I} = \bigoplus_{m \geq 0} \mathcal{I}_m$ , dessen Summanden endlich erzeugt sind. Für jedes  $m \geq 0$  erhalten wir somit die folgende exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_m \longrightarrow \mathcal{F}_m \xrightarrow{\varphi_m} \mathcal{A}_m|_U \longrightarrow 0 \quad \square$$

*Bemerkung.* Es gilt auch die Umkehrung: Ist  $\mathcal{A} = \bigoplus_{m \geq 0} \mathcal{A}_m$  eine graduierte  $\mathcal{O}_S$ -Algebra, so dass  $\mathcal{A}_m$  für alle  $m \geq 0$  ein kohärenter  $\mathcal{O}_S$ -Modul ist, so ist  $\mathcal{A}$  eine endlich präsentierte  $\mathcal{O}_S$ -Algebra [AM86, 1.17, S. 612].

**4.2. Der Funktor  $F_{\mathcal{A}}$ .** Es sei  $S$  ein komplexer Raum und  $\mathcal{A}$  eine endlich präsentierte  $\mathcal{O}_S$ -Algebra. Wir betrachten den Funktor  $F_{\mathcal{A}}: (\mathcal{C}\mathcal{O}_S)^\circ \rightarrow \mathbf{Cns}$  von der Kategorie der komplexen Räume über  $S$  in die Kategorie der Mengen, welcher durch

$$F_{\mathcal{A}}(T) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_T\text{-alg}}(\pi_T^* \mathcal{A}, \mathcal{O}_T)$$

für komplexe Räume  $(T, \pi_T)$  über  $S$  und

$$F_{\mathcal{A}}(f): \begin{cases} \text{Hom}_{\mathcal{O}_{T'}\text{-alg}}(\pi_{T'}^* \mathcal{A}, \mathcal{O}_{T'}) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{O}_T\text{-alg}}(\pi_T^* \mathcal{A}, \mathcal{O}_T) \\ \omega & \longmapsto & f^* \omega \end{cases} \quad (4.2.a)$$

für Morphismen  $f: (T, \pi_T) \rightarrow (T', \pi_{T'})$  von komplexen Räumen über  $S$  definiert ist.

**SATZ 4.2.1.** *Der Funktor  $F_{\mathcal{A}}$  ist darstellbar in der Kategorie der komplexen Räume über  $S$ .*

*Beweis.* (a) Nehmen wir zunächst an, dass  $\mathcal{A} \simeq \mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n]$  ist. In diesem Fall stimmt  $F_{\mathcal{A}}$  mit dem Funktor  $F_{[t_1, \dots, t_n]/S}$  überein, welcher nach Korollar 3.5.2 durch  $(\mathbb{C}^n \times S, \xi_{\mathbb{C}^n \times S})$  dargestellt wird.

(b) Betrachten wir nun den Fall  $\mathcal{A} \simeq \mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n]/\mathcal{I}$ , wobei  $\mathcal{I}$  ein Ideal in  $\mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n]$  ist, welches von globalen Schnitten  $f_1, \dots, f_m \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n])$  erzeugt wird. Wir haben dann eine kurze exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow \mathcal{I} \xrightarrow{i} \mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n] \xrightarrow{p} \mathcal{A} \longrightarrow 0$$

Ist  $(T, \pi_T)$  ein komplexer Raum über  $S$ , dann erhalten wir durch Basiswechsel die exakte Sequenz:

$$\pi_T^* \mathcal{I} \xrightarrow{\pi_T^* i} \pi_T^* \mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n] \simeq \mathcal{O}_T[t_1, \dots, t_n] \xrightarrow{\pi_T^* p} \pi_T^* \mathcal{A} \longrightarrow 0$$

Wir setzen nun:

$$\mathcal{I}_T := \pi_T^* i(\pi_T^* \mathcal{I})$$

Die  $\mathcal{O}_T$ -Algebromorphismen  $\pi_T^* \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{O}_T$  stimmen mit den  $\mathcal{O}_T$ -Algebromorphismen  $\mathcal{O}_T[t_1, \dots, t_n] \rightarrow \mathcal{O}_T$  überein, welche über  $\pi_T^* \mathcal{A}$  faktorisieren, das heißt das Ideal  $\mathcal{I}_T$  annullieren. Wir erhalten auf diese Weise eine in  $T$  natürliche Bijektion:

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-alg}}(\pi_T^* \mathcal{A}, \mathcal{O}_T) \xrightarrow{\simeq} \left\{ \Phi \in F_{[t_1, \dots, t_n]/S}(T) : \Phi(\mathcal{I}_T) = 0 \right\} \quad (4.2.b)$$

$$\omega \longmapsto \omega \circ \pi_T^* p$$

Sei weiter  $\mathcal{J} := \xi_{\mathbb{C}^n \times S}(\mathcal{I}_{\mathbb{C}^n \times S})$ , dann haben wir nach Konstruktion das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{I}_{\mathbb{C}^n \times S} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times S}[t_1, \dots, t_n] & \longrightarrow & \pi_{\mathbb{C}^n \times S}^* \mathcal{A} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \xi_{\mathbb{C}^n \times S} \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{J} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times S} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times S} / \mathcal{J} \longrightarrow 0 \end{array} \quad (4.2.c)$$

Das Ideal  $\mathcal{J}$  ist  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times S}$ -kohärent und definiert folglich einen abgeschlossenen komplexen Unterraum  $X$  von  $\mathbb{C}^n \times S$ . Die holomorphen Abbildungen von  $T$  nach  $X$  sind

genau die holomorphen Abbildungen von  $T$  nach  $\mathbb{C}^n \times S$ , welche über  $X$  faktorisieren. Sei  $j: X \hookrightarrow \mathbb{C}^n \times S$  die kanonische abgeschlossene Einbettung, dann haben wir eine in  $T$  natürliche Bijektion:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_S(T, X) &\xrightarrow{\sim} \left\{ \psi \in \text{Hom}_S(T, \mathbb{C}^n \times S) : \tilde{\psi}(\mathcal{J}) = 0 \right\} \\ f &\mapsto f \circ j \end{aligned} \quad (4.2.d)$$

Wir behaupten nun, dass der funktorielle Isomorphismus  $h_{\mathbb{C}^n \times S} \xrightarrow{\sim} F_{[t_1, \dots, t_n]/S}$  einen funktoriellen Isomorphismus  $\beta_{\mathcal{A}}$  der Funktoren  $h_X \xrightarrow{\sim} F_{\mathcal{A}}$  induziert:

$$\begin{array}{ccccc} h_X & \xrightarrow{\beta_{\mathcal{A}}} & & & F_{\mathcal{A}} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ h_{\mathbb{C}^n \times S} & \xrightarrow{\beta_{\Gamma, n/S}} & \Gamma_{\Gamma, n/S} & \xrightarrow{\beta_{\Phi}^{-1}} & F_{[t_1, \dots, t_n]/S} \end{array}$$

Die vertikalen Abbildungen bezeichnen dabei die Inklusionen, welche durch die Isomorphismen (4.2.b) und (4.2.d) induziert werden. Dazu ist zu zeigen, dass eine holomorphe Abbildung  $\varphi \in \text{Hom}_S(T, \mathbb{C}^n \times S)$  genau dann über  $X$  faktorisiert, wenn der durch

$$(\gamma_1, \dots, \gamma_n) := \beta_{\Gamma, n/S}(\varphi) = (\tilde{\varphi}(z_1), \dots, \tilde{\varphi}(z_n))$$

definierte Einsetzmorphismus  $\Phi$  das Ideal  $\mathcal{J}_T$  annulliert. Sind für  $k = 1, \dots, m$  die Erzeuger von  $\mathcal{J}$  gegeben durch  $f_k = \sum f_{k,v} t^v$ , dann erzeugen

$$f_k^T := \sum \tilde{\pi}_T(f_{k,v}) t_1^{v_1} \dots t_n^{v_n} \in \Gamma(T, \mathcal{O}_T[t_1, \dots, t_n]), \quad k = 1, \dots, m,$$

das Ideal  $\mathcal{J}_T$  und

$$g_k := \xi_{\mathbb{C} \times S}(f_k^{\mathbb{C} \times S}) \in \Gamma(\mathbb{C}^n \times S, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times S}), \quad k = 1, \dots, m,$$

erzeugen das Ideal  $\mathcal{J}$ . Nun gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(g_k) &= \tilde{\varphi}\left(\sum \tilde{\pi}_{\mathbb{C} \times S}(f_{k,v}) z_1^{v_1} \dots z_n^{v_n}\right) \\ &= \sum \tilde{\pi}_T(f_{k,v}) \gamma^{v_1} \dots \gamma^{v_n} = \Phi(f_k^T) \end{aligned}$$

Folglich ist  $\tilde{\varphi}(\mathcal{J}) = 0$  genau dann, wenn  $\Phi$  das Ideal  $\mathcal{J}_T$  annulliert. Der Funktor  $F_{\mathcal{A}}$  wird somit durch den komplexen Raum  $X$  dargestellt, wobei das darstellende Element durch  $\xi_X = \alpha(\beta_{\mathcal{A}}) = [\beta_{\mathcal{A}}(X)](\text{id}_X)$  gegeben ist. Das Bild von  $\text{id}_X$  in  $h_{\mathbb{C}^n \times X}(X)$  ist die kanonische abgeschlossene Einbettung  $j: X \hookrightarrow \mathbb{C}^n \times S$ , und es gilt:

$$\begin{aligned} [\beta_{\Phi}^{-1} \circ \beta_{\Gamma, n/S}(X)](j) &= [\beta_{\Phi}^{-1}(X)](\tilde{j}(z_1), \dots, \tilde{j}(z_n)) \\ &= (t_i \mapsto \tilde{j}(z_i)) = j^* \xi_{\mathbb{C}^n \times S} \end{aligned}$$

Wir erhalten also  $\xi_X \in F_{\mathcal{A}}(X)$  als die durch  $\xi_X \circ \pi_X^* p = j^* \xi_{\mathbb{C}^n \times S}$  eindeutig bestimmte Abbildung. Das folgende kommutative Diagramm beschreibt für  $x \in X$  die Beziehung zwischen  $\xi_{X,x}$  und  $\xi_{\mathbb{C}^n \times S, x}$ :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times S, x}[t_1, \dots, t_n] & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X, x}[t_1, \dots, t_n] & \xrightarrow{(\pi_X^* p)_x} & (\pi_X^* \mathcal{A})_x \\ \xi_{\mathbb{C}^n \times S, x} \downarrow t_i \mapsto \tilde{p}_1(z_i) & & (j^* \xi_{\mathbb{C}^n \times S})_x \downarrow t_i \mapsto \tilde{j}_x(\tilde{p}_1(z_i)) & & \downarrow \xi_{X, x} \\ \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times S, x} & \xrightarrow{\tilde{j}_x} & \mathcal{O}_{X, x} & \xlongequal{\quad} & \mathcal{O}_{X, x} \end{array} \quad (4.2.e)$$

(c) Ist  $\mathcal{A}$  eine beliebige endlich präsentierte  $\mathcal{O}_S$ -Algebra, dann existiert eine offene Überdeckung  $(S_i)_{i \in I}$  von  $S$ , so dass

$$\mathcal{A}|_{S_i} \simeq \mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_{n_i}]/(f_{i,1}, \dots, f_{i,m_i}),$$

wobei die  $f_{i,j}$  Schnitte aus  $\Gamma(S_i, \mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_{n_i}])$  sind. Bezeichnet  $j_i: S_i \hookrightarrow S$  die kanonischen Inklusion, dann haben wir für alle komplexen Räume  $(T, \pi_T)$  über  $S_i$  die folgende natürliche Isomorphie:

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{A}|_{S_i}} &= F_{\mathcal{A}} \circ i_{S_i/S}(T) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_T\text{-alg}}((j_i \circ \pi_T)^* \mathcal{A}, \mathcal{O}_T) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}_T\text{-alg}}(\pi_T^*(\mathcal{A}|_{S_i}), \mathcal{O}_T) = F_{\mathcal{A}|_{S_i}}(T) \end{aligned}$$

Nach (b) ist  $F_{\mathcal{A}|_{S_i}}(T)$  darstellbar in der Kategorie der komplexen Räume über  $S_i$ , folglich ist  $F_{\mathcal{A}|_{S_i}}$  ebenfalls darstellbar.

Sei  $(T, \pi_T)$  ein komplexer Raum über  $S$ . Indem  $U$  die offenen Mengen von  $T$  durchläuft, erhalten wir eine Prägarbe  $U \rightsquigarrow F_{\mathcal{A}}(T|_U)$  auf  $T$ . Für  $F_{\mathcal{A}}(T|_U)$  gilt:

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{A}}(T|_U) &= \text{Hom}_{\mathcal{O}_{T|U}\text{-alg}}(\pi_{T|U}^* \mathcal{A}, \mathcal{O}_{T|U}) \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{O}_{T|U}\text{-alg}}((\pi_T \circ j)^* \mathcal{A}, \mathcal{O}_{T|U}) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}_{T|U}\text{-alg}}((\pi_T^* \mathcal{A})|_U, \mathcal{O}_{T|U}) \end{aligned}$$

Wir sehen somit, dass die Prägarbe  $U \rightsquigarrow F_{\mathcal{A}}(T|_U)$  nichts anderes ist als die Garbe  $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_T\text{-alg}}(\pi_T^* \mathcal{A}, \mathcal{O}_T)$  der Keime von  $\mathcal{O}_S$ -Algebrahomomorphismen.

Aus [TCGA IV, Corollaire 5.7, S. 26] ergibt sich nun die Darstellbarkeit von  $F_{\mathcal{A}}$  in der Kategorie der komplexen Räume über  $S$ .  $\square$

**4.3. Der Funktor  $G_{\mathcal{A}}$ .** Es sei  $S$  ein komplexer Raum und  $\mathcal{A}$  eine endlich präsentierte  $\mathcal{O}_S$ -Algebra. Wir betrachten den Funktor  $G_{\mathcal{A}}: (\mathcal{C}\mathcal{O}_S)^\circ \rightarrow \mathbf{Ens}$  von der Kategorie der komplexen Räume über  $S$  in die Kategorie der Mengen, welcher durch

$$G_{\mathcal{A}}(T) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-alg}}(\mathcal{A}, \pi_*^T \mathcal{O}_T)$$

für komplexe Räume  $(T, \pi_T)$  über  $S$  und

$$G_{\mathcal{A}}(f): \begin{cases} \text{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-alg}}(\mathcal{A}, \pi_*^{T'} \mathcal{O}_{T'}) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-alg}}(\mathcal{A}, \pi_*^T \mathcal{O}_T) \\ \omega & \longmapsto & \pi_*^{T'} \tilde{f} \circ \omega \end{cases} \quad (4.3.a)$$

für Morphismen  $f: (T, \pi_T) \rightarrow (T', \pi_{T'})$  von komplexen Räumen über  $S$  definiert ist. Für alle komplexen Räume  $(T, \pi)$  über  $S$  induziert die in  $T$  natürliche Isomorphie

$$F_{\mathcal{A}}(T) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_T\text{-alg}}(\pi^* \mathcal{A}, \mathcal{O}_T) \begin{array}{c} \xrightarrow{\flat} \\ \xleftarrow{\#} \end{array} \text{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-alg}}(\mathcal{A}, \pi_* \mathcal{O}_T) = G_{\mathcal{A}}(T)$$

einen funktoriellen Isomorphismus  $F_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\sim} G_{\mathcal{A}}$ . Wir erhalten daher als unmittelbare Konsequenz von Satz 4.2.1:

**SATZ 4.3.1.** *Der Funktor  $G_{\mathcal{A}}$  ist darstellbar in der Kategorie der komplexen Räume über  $S$ . Ist  $(X, \xi_X)$  eine Darstellung des Funktors  $F_{\mathcal{A}}$ , so wird  $G_{\mathcal{A}}$  durch  $(X, \xi_X^\flat)$  dargestellt.*

Wir wollen nun für  $x \in X$  die Beziehung zwischen  $\xi_{\mathbb{C}^n \times S, x}^\flat$  und  $\xi_{X, x}^\flat$  beschreiben. Nehmen wir dazu an, dass  $\mathcal{A} \simeq \mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n]/\mathcal{I}$  ist, wobei  $\mathcal{I}$  ein Ideal ist, welches von globalen Schnitten  $f_1, \dots, f_m \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n])$  erzeugt wird. Für  $s := \pi_X(x)$

ist dann  $\mathcal{A}_s \simeq \mathcal{O}_{S,s}[t_1, \dots, t_n]/\mathcal{I}_s$ , und wir erhalten aus (4.2.e) das kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}_{S,s}[t_1, \dots, t_n] & \xlongequal{\quad} & \mathcal{O}_{S,s}[t_1, \dots, t_n] & \xrightarrow{p} & \mathcal{A}_s \\
\text{id} \otimes 1 \downarrow & & \text{id} \otimes 1 \downarrow & & \text{id} \otimes 1 \downarrow \\
\mathcal{O}_{S,s}[t_1, \dots, t_n] \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times S, x} & \xrightarrow{\text{id} \otimes \tilde{j}_x} & \mathcal{O}_{S,s}[t_1, \dots, t_n] \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} \mathcal{O}_{X,x} & \xrightarrow{p \otimes \text{id}} & \mathcal{A}_s \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} \mathcal{O}_{X,x} \\
\wr \downarrow & & \wr \downarrow & & \wr \downarrow \\
\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times S, x}[t_1, \dots, t_n] & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X,x}[t_1, \dots, t_n] & \xrightarrow{(\pi_X^* p)_x} & (\pi_X^* \mathcal{A})_x \\
\xi_{\mathbb{C}^n \times S, x} \downarrow & & (j^* \xi_{\mathbb{C}^n \times S, x})_x \downarrow & & \xi_{X,x} \downarrow \\
\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times S, x} & \xrightarrow{\tilde{j}_x} & \mathcal{O}_{X,x} & \xlongequal{\quad} & \mathcal{O}_{X,x}
\end{array}$$

Die Komposition der rechten bzw. linken vertikalen Abbildungen sind dabei gerade  $\xi_{\mathbb{C}^n \times S, x}^b$  und  $\xi_{X,x}^b$ . Sei  $\mathcal{I}$  wie in Teil (b) des Beweises von Satz (4.2.1) definiert. Dann erzeugt das Bild von  $\mathcal{I}_s$  unter  $\xi_{\mathbb{C}^n \times S, x}^b$  das Ideal  $\mathcal{I}_x$ , und wir erhalten das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{I}_s & \longrightarrow & \mathcal{O}_{S,s}[t_1, \dots, t_n] & \xrightarrow{p} & \mathcal{A}_s \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \xi_{\mathbb{C}^n \times S, x}^b \downarrow & & \downarrow \xi_{X,x}^b \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{I}_x & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times S, x} & \xrightarrow{\tilde{j}_x} & \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow 0
\end{array} \quad (4.3.b)$$

Nach Satz 3.6.1 ist  $\xi_{\mathbb{C}^n \times S, x}^b$  die kanonische Injektion, und wir erhalten somit:

**KOROLLAR 4.3.2.** *Ist  $(X, \xi_X)$  eine Darstellung des Funktors  $F_{\mathcal{A}}$ , so ist  $\xi_X^b$  ein Monomorphismus.*

**4.4. Die funktoriellen Isomorphismen  $\beta_{\mathcal{A}}$  und  $\gamma_{\mathcal{A}}$ .** Ist  $(X, \xi_X)$  eine Darstellung des Funktors  $F_{\mathcal{A}}$ , so ist durch das Element  $\xi_X \in F_{\mathcal{A}}(X)$  der funktorielle Isomorphismus  $h_X \xrightarrow{\sim} F_{\mathcal{A}}$  bestimmt, welcher nach Theorem 2.2.1 gegeben ist durch:

$$\beta_{\mathcal{A}}(T) := [\beta(\xi_X)](T): \begin{cases} h_X(T) & \xrightarrow{\sim} & F_{\mathcal{A}}(T) \\ \phi & \mapsto & (F_{\mathcal{A}}(\phi))(\xi_X) = \phi^* \xi_X \end{cases} \quad (4.4.a)$$

Entsprechend bestimmt das Element  $\xi_X^b \in G_{\mathcal{A}}(X)$  den funktoriellen Isomorphismus  $h_X \xrightarrow{\sim} G_{\mathcal{A}}$ :

$$\gamma_{\mathcal{A}}(T) := [\beta(\xi_X^b)](T): \begin{cases} h_X(T) & \xrightarrow{\sim} & G_{\mathcal{A}}(T) \\ \phi & \mapsto & (G_{\mathcal{A}}(\phi))(\xi_X^b) = \pi_*^X \tilde{\phi} \circ \xi_X^b \end{cases} \quad (4.4.b)$$

## § 5. Definition des analytischen Spektrums

Wir zeigen in diesem Paragraphen, dass wir einen Funktor von der Kategorie der endlich präsentierten  $\mathcal{O}_S$ -Algebren in die Kategorie der komplexen Räume über  $S$  erhalten, indem wir jeder endlich präsentierten  $\mathcal{O}_S$ -Algebra eine Darstellung der Funktoren  $F_{\mathcal{A}}$  b.z.w.  $G_{\mathcal{A}}$  zuordnen.

**5.1. Der komplexe Raum  $\text{Specan}(\mathcal{A})$ .** Ist  $\mathcal{A}$  eine endlich präsentierte  $\mathcal{O}_S$ -Algebra, so nennen wir ein darstellendes Objekt der Funktoren  $F_{\mathcal{A}}$  und  $G_{\mathcal{A}}$  ein *analytisches Spektrum* von  $\mathcal{A}$ . Nach Korollar 2.3.4 ist das analytische Spektrum einer endlich präsentierte  $\mathcal{O}_S$ -Algebra nur bis auf natürliche Isomorphie eindeutig bestimmt. Wir wählen daher für jede endlich präsentierte  $\mathcal{O}_S$ -Algebra  $\mathcal{A}$  in der Isomorphieklasse der analytischen Spektren von  $\mathcal{A}$  einen Repräsentanten und bezeichnen ihn mit  $\text{Specan}(\mathcal{A})$ . Dabei wählen wir das in Teil (b) des Beweises von Satz 4.2.1 konstruierte analytische Spektrum, wenn  $\mathcal{A} \simeq \mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n]/\mathcal{I}$  ist, wobei  $\mathcal{I}$  ein von endlich vielen globalen Schnitten erzeugtes Ideal ist.

**5.2. Der funktorielle Morphismus  $F_\varphi$ .** Es sei  $\varphi: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  ein Morphismus von endlich präsentierte  $\mathcal{O}_S$ -Algebren. Für jeden komplexen Raum  $(T, \pi_T)$  über  $S$  sei:

$$F_\varphi(T) : \begin{cases} \text{Hom}_{\mathcal{O}_T\text{-alg}}(\pi_T^* \mathcal{A}, \mathcal{O}_T) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{O}_T\text{-alg}}(\pi_T^* \mathcal{B}, \mathcal{O}_T) \\ =F_{\mathcal{A}}(T) & & =F_{\mathcal{B}}(T) \\ \omega & \longmapsto & \omega \circ \pi_T^* \varphi \end{cases} \quad (5.2.a)$$

Wir zeigen, dass  $F_\varphi$  einen funktoriellen Morphismus  $F_{\mathcal{A}} \rightarrow F_{\mathcal{B}}$  definiert. Dazu müssen wir zeigen, dass für alle Morphismen  $f: T \rightarrow T'$  von komplexen Räumen über  $S$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F_{\mathcal{A}}(T') & \xrightarrow{F_{\mathcal{A}}(f)} & F_{\mathcal{A}}(T) \\ F_\varphi(T') \uparrow & & \uparrow F_\varphi(T) \\ F_{\mathcal{B}}(T') & \xrightarrow{F_{\mathcal{B}}(f)} & F_{\mathcal{B}}(T) \end{array}$$

kommutativ ist. Sei also  $\omega \in F_{\mathcal{B}}(T)$ , dann ergibt sich folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} [F_\varphi(T) \circ F_{\mathcal{B}}(f)](\omega) &\stackrel{(4.2.a)}{=} [F_\varphi(T)](f^* \omega) \stackrel{(5.2.a)}{=} f^* \omega \circ \pi_T^* \varphi \stackrel{(2.4.a)}{=} f^* \omega \circ (\pi_{T'} \circ f)^* \varphi \\ &\simeq f^* \omega \circ f^*(\pi_{T'}^* \varphi) = f^*(\omega \circ \pi_{T'}^* \varphi) \\ &\stackrel{(4.2.a)}{=} [F_{\mathcal{A}}(f)](\omega \circ \pi_{T'}^* \varphi) \stackrel{(5.2.a)}{=} [F_{\mathcal{A}}(f) \circ F_\varphi(T')](\omega) \end{aligned}$$

**5.3. Der funktorielle Morphismus  $G_\varphi$ .** Betrachten wir nun den adjungierten Fall. Sei dazu  $\varphi: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  wieder ein Morphismus von endlich präsentierte  $\mathcal{O}_S$ -Algebren. Für jeden komplexen Raum  $(T, \pi_T)$  über  $S$  setzen wir:

$$G_\varphi(T) : \begin{cases} \text{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-alg}}(\mathcal{A}, \pi_*^T \mathcal{O}_T) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-alg}}(\mathcal{B}, \pi_*^T \mathcal{O}_T) \\ =G_{\mathcal{A}}(T) & & =G_{\mathcal{B}}(T) \\ \omega & \longmapsto & \omega \circ \varphi \end{cases} \quad (5.3.a)$$

Um zu verifizieren, dass  $G_\varphi$  einen funktoriellen Morphismus  $G_{\mathcal{B}} \rightarrow G_{\mathcal{A}}$  definiert, ist für alle Morphismen von komplexen Räumen  $f: T \rightarrow T'$  über  $S$  die Kommutativität des Diagrammes

$$\begin{array}{ccc} G_{\mathcal{A}}(T') & \xrightarrow{G_{\mathcal{A}}(f)} & G_{\mathcal{A}}(T) \\ G_\varphi(T') \uparrow & & \uparrow G_\varphi(T) \\ G_{\mathcal{B}}(T') & \xrightarrow{G_{\mathcal{B}}(f)} & G_{\mathcal{B}}(T) \end{array}$$

zu überprüfen. Sei also  $\omega \in G_{\mathcal{B}}(T')$ , dann ergibt sich folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} [G_\varphi(T) \circ G_{\mathcal{B}}(f)](\omega) &\stackrel{(4.3.a)}{=} [G_\varphi(T)](\pi_*^{T'} \tilde{f} \circ \omega) \stackrel{(5.3.a)}{=} \pi_*^{T'} \tilde{f} \circ \omega \circ \varphi \\ &\stackrel{(4.3.a)}{=} [G_{\mathcal{A}}(\omega)](\omega \circ \varphi) \stackrel{(5.3.a)}{=} [G_{\mathcal{A}}(\omega) \circ G_\varphi(T')](\omega) \end{aligned}$$

**5.4. Der Funktor  $\mathcal{A} \rightsquigarrow \text{Specan}(\mathcal{A})$ .** Sei  $\varphi: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  ein Morphismus von endlich präsentierten  $\mathcal{O}_S$ -Algebren, und seien  $X := \text{Specan}(\mathcal{A})$  und  $Y := \text{Specan}(\mathcal{B})$  die analytischen Spektren von  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$ . Dann gilt  $(F_\varphi)^\vee = (G_\varphi)^\vee$ , denn nach Konstruktion ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc}
 h_X(T) & \longrightarrow & h_Y(T) \\
 \beta_{\mathcal{A}}(T) \downarrow & & \downarrow \beta_{\mathcal{B}}(T) \\
 F_{\mathcal{A}}(T) & \xrightarrow{F_\varphi(T)} & F_{\mathcal{B}}(T) \\
 \downarrow b & & \downarrow b \\
 G_{\mathcal{A}}(T) & \xrightarrow{G_\varphi(T)} & G_{\mathcal{B}}(T)
 \end{array}
 \quad (5.4.a)$$

Wir setzen nun  $\text{Specan}(\varphi) := (F_\varphi)^\vee = (G_\varphi)^\vee$  und behaupten, dass hierdurch ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der endlich präsentierten  $\mathcal{O}_S$ -Algebren in die Kategorie der komplexen Räume über  $S$  definiert ist. Wir zeigen dazu, dass die Funktoren  $F_{\mathcal{A}}$  zusammen mit den funktoriellen Morphismen  $F_\varphi: F_{\mathcal{A}} \rightarrow F_{\mathcal{B}}$  die Voraussetzungen von Korollar 2.3.5 erfüllen. Sei also  $\omega \in F_{\mathcal{A}}(T)$ , dann gilt:

$$[\text{Fid}_{\mathcal{A}}(T)](\omega) = \omega \circ \pi_T^* \text{id}_{\mathcal{A}} = \omega$$

Folglich ist  $\text{Fid}_{\mathcal{A}} = \text{id}_{F_{\mathcal{A}}}$ . Ist  $\mathcal{C} \xrightarrow{\psi} \mathcal{B} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{A}$  die Komposition zweier Morphismen von endlich präsentierten  $\mathcal{O}_S$ -Algebren, dann gilt für alle  $\omega \in F_{\mathcal{A}}(T)$ :

$$\begin{aligned}
 [F_{\varphi \circ \psi}(T)](\omega) &\stackrel{(5.2.a)}{=} \omega \circ \pi_T^*(\varphi \circ \psi) = (\omega \circ \pi_T^* \varphi) \circ \pi_T^* \psi \\
 &\stackrel{(5.2.a)}{=} [F_\psi(T) \circ F_\varphi(T)](\omega)
 \end{aligned}$$

Die Funktoren  $G_{\mathcal{A}}$  zusammen mit den funktoriellen Morphismen  $G_\varphi: G_{\mathcal{A}} \rightarrow G_{\mathcal{B}}$  erfüllen ebenfalls die Voraussetzungen von Korollar 2.3.5. Ist  $\mathcal{A}$  eine endlich präsentierte  $\mathcal{O}_S$ -Algebra, dann ergibt sich für alle  $\omega \in G_{\mathcal{A}}(T)$ :

$$[G_{\text{id}_{\mathcal{A}}}(T)](\omega) = \omega \circ \text{id}_{\mathcal{A}} = \omega$$

Es ist also  $G_{\text{id}_{\mathcal{A}}} = \text{id}_{G_{\mathcal{A}}}$ . Ist  $\mathcal{C} \xrightarrow{\psi} \mathcal{B} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{A}$  die Komposition zweier Morphismen von endlich präsentierten  $\mathcal{O}_S$ -Algebren, dann gilt für alle  $\omega \in G_{\mathcal{A}}(T)$ :

$$[G_{\varphi \circ \psi}(T)](\omega) \stackrel{(5.3.a)}{=} \omega \circ \varphi \circ \psi \stackrel{(5.3.a)}{=} [G_\psi(T) \circ G_\varphi(T)](\omega)$$

**SATZ 5.4.1.** *Es sei  $\varphi: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  ein Morphismus von endlich präsentierten  $\mathcal{O}_S$ -Algebren,  $(X, \pi_X) := \text{Specan}(\mathcal{A})$ ,  $(Y, \pi_Y) := \text{Specan}(\mathcal{B})$  und  $f: X \rightarrow Y$  ein Morphismus von komplexen Räumen über  $S$ . Dann ist  $f = \text{Specan}(\varphi)$  genau dann, wenn eines der folgenden äquivalenten Diagramme kommutativ ist:*

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_X^* \mathcal{B} & \xrightarrow{\pi_X^* \varphi} & \pi_X^* \mathcal{A} \\
 f^* \xi_Y \downarrow & & \downarrow \xi_X \\
 \mathcal{O}_X & \xlongequal{\quad} & \mathcal{O}_X
 \end{array}
 \quad (5.4.b)$$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{B} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{A} \\
 \xi_Y^b \downarrow & & \downarrow \xi_X^b \\
 \pi_*^Y \mathcal{O}_Y & \xrightarrow{\pi_*^Y \tilde{f}} & \pi_*^X \mathcal{O}_X
 \end{array}
 \quad (5.4.c)$$

*Beweis.* ( $\Rightarrow$ ) Sei  $f = \text{Specan}(\varphi)$ , dann folgt die Kommutativität der beiden Diagramme aus Satz 2.3.1:

$$\begin{aligned}\xi_X \circ \pi_X^* \varphi &= [F_\varphi(X)](\xi_X) = (F_{\mathcal{B}}(f))(\xi_Y) = f^* \xi_Y \\ \xi_X^b \circ \varphi &= [G_\varphi(X)](\xi_X^b) = (G_{\mathcal{B}}(f))(\xi_Y^b) = \pi_*^Y \tilde{f} \circ \xi_Y^b\end{aligned}$$

( $\Leftarrow$ ) Ist eines der beiden Diagramme kommutativ, so erfüllt  $f$  die Eigenschaft (2.3.a) von Satz 2.3.1. Aufgrund der Eindeutigkeit folgt  $f = \text{Specan}(\varphi)$ .  $\square$

**KOROLLAR 5.4.2.** *Es sei  $\varphi: \mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n] \rightarrow \mathcal{A}$  ein Morphismus von endlich präsentierten  $\mathcal{O}_S$ -Algebren,  $X := \text{Specan}(\mathcal{A})$  und  $f: X \rightarrow \mathbb{C}^n \times S$  ein Morphismus von komplexen Räumen über  $S$ . Dann gilt  $f = \text{Specan}(\varphi)$  genau dann, wenn*

$$\tilde{f}(\mathfrak{z}_i) = \xi_X^b \circ \varphi(t_i) \tag{5.4.d}$$

für  $i = 1, \dots, n$  gilt, wobei  $\mathfrak{z}_i \in \Gamma(\mathbb{C}^n \times S, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times S})$  die  $i$ -te Koordinatenfunktion von  $\mathbb{C}^n \times S$  bezeichnet.

*Beweis.* Nach Satz 5.4.1 gilt  $f = \text{Specan}(\varphi)$  genau dann, wenn das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n] & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{A} \\ \xi_{\mathbb{C}^n \times S}^b \downarrow & & \downarrow \xi_X^b \\ \pi_*^{\mathbb{C}^n \times S} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times S} & \xrightarrow{\pi_*^{\mathbb{C}^n \times S} \tilde{f}} & \pi_*^X \mathcal{O}_X \end{array}$$

Die Abbildung  $f$  ist durch die Schnitte  $\tilde{f}(\mathfrak{z}_i) \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$  eindeutig bestimmt (vgl. Satz 3.4.1). Folglich ist obiges Diagramm genau dann kommutativ, wenn für  $i = 1, \dots, n$  gilt:

$$\tilde{f}(\mathfrak{z}_i) = \pi_*^{\mathbb{C}^n \times S} \tilde{f} \circ \xi_{\mathbb{C}^n \times S}^b(t_i) = \xi_X^b \circ \varphi(t_i) \quad \square$$

**SATZ 5.4.3.** *Es sei  $\varphi: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  ein Epimorphismus von endlich präsentierten  $\mathcal{O}_S$ -Algebren. Dann ist  $\text{Specan}(\varphi): \text{Specan}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Specan}(\mathcal{B})$  eine abgeschlossene Einbettung.*

*Beweis.* Sei  $X := \text{Specan}(\mathcal{A})$ ,  $Y := \text{Specan}(\mathcal{B})$  und  $f := \text{Specan}(\varphi)$ . Da  $\varphi$  epimorph ist, ist  $G_\varphi(T): G_{\mathcal{A}}(T) \rightarrow G_{\mathcal{B}}(T)$  für alle komplexen Räume  $T$  über  $S$  injektiv. Anhand des Diagrammes (5.4.a) sehen wir somit, dass  $h_f(T)$  ebenfalls injektiv ist. Die Abbildung  $f$  ist also ein Monomorphismus [TCF, 1.2, S. 3]. Dies ist gleichbedeutend damit, dass  $|f|: |X| \rightarrow |Y|$  injektiv und  $\tilde{f}_x: \mathcal{O}_{Y, f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$  für alle  $x \in X$  surjektiv ist [CAG, 0.4, S. 3].

Es bleibt somit zu zeigen, dass  $|f|$  abgeschlossen ist (vgl. [CAG, 0.23, S. 19]). Wir zeigen dazu, dass  $f$  eigentlich ist [BGT, I, § 10.1, Proposition 2, S. 98]. Nach [CAS, 9.2.4, S. 175] ist  $f$  eigentlich, wenn für alle  $y \in Y$  eine Umgebung  $V$  von  $y$  existiert, so dass  $f^{-1}(V)$  kompakt ist. Es reicht somit zu zeigen, dass für alle  $s \in S$  eine Umgebung  $U$  von  $s$  existiert, so dass  $f_{|\pi_X^{-1}(U)}: \pi_X^{-1}(U) \rightarrow \pi_Y^{-1}(U)$  eigentlich ist. Wir können daher im Folgenden annehmen, dass  $\mathcal{B} \simeq \mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n]/\mathcal{I}$  ist, wobei  $\mathcal{I}$  ein von globalen Schnitten erzeugtes Ideal ist. Wir haben dann ein kommutatives Diagramm mit epimorphen Abbildungen wie folgt:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longleftarrow & \mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n] \\ \swarrow \varphi & & \searrow \\ & \mathcal{B} & \end{array}$$

Die Konstruktion des analytischen Spektrums (vgl. Teil (b) des Beweises von Satz 4.2.1) ergibt nun das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j_X} & \mathbb{C}^n \times S \\ & \searrow f & \nearrow j_Y \\ & & Y \end{array}$$

Dabei bezeichnen  $j_X$  und  $j_Y$  die abgeschlossenen Einbettungen, welche  $X$  und  $Y$  als abgeschlossene komplexe Unterräume von  $\mathbb{C}^n \times S$  realisieren. Die Komposition  $|j_Y| \circ |f|$  ist eigentlich, da  $j_X$  als abgeschlossene Einbettung eigentlich ist. Zusammen mit der Injektivität von  $|j_Y|$  ergibt sich, dass  $|f|$  eigentlich ist [BGT, I, § 10.1, Proposition 5, S. 99].  $\square$

## § 6. Grundlegende Eigenschaften

Wir betrachten zunächst das Verhalten des analytischen Spektrums hinsichtlich Produktbildung und Basiswechsel. Im Anschluss untersuchen wir den Zusammenhang zwischen den Halmen einer endlich präsentierten  $\mathcal{O}_S$ -Algebra und den Fasern des zugehörigen analytischen Spektrums.

**6.1. Produkte und Basiswechsel.** Nach Satz 4.1.2 ist das Tensorprodukt von endlich präsentierten  $\mathcal{O}_S$ -Algebren wieder endlich präsentiert. Für das analytische Spektrum des Tensorproduktes gilt:

**Satz 6.1.1.** *Es seien  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  endlich präsentierte  $\mathcal{O}_S$ -Algebren sowie  $(X, \xi_X)$  und  $(Y, \xi_Y)$  Darstellungen der Funktoren  $F_{\mathcal{A}}$  und  $F_{\mathcal{B}}$ . Dann wird der Funktor  $F_{\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{B}}$  durch das Paar  $(X \times_S Y, \xi_{X \times_S Y})$  dargestellt, wobei  $\xi_{X \times_S Y}$  die durch*

$$\xi_{X \times_S Y} \circ i_1 = p_1^* \xi_X \quad \text{und} \quad \xi_{X \times_S Y} \circ i_2 = p_2^* \xi_Y \quad (6.1.a)$$

*eindeutig bestimmte Abbildung bezeichnet. Die Darstellung des Funktors  $G_{\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{B}}$  ist gegeben durch das Paar  $(X \times_S Y, \xi_{X \times_S Y}^b)$ , wobei  $\xi_{X \times_S Y}^b$  die durch*

$$\xi_{X \times_S Y}^b \circ i_1 = \pi_*^X \tilde{p}_1 \circ \xi_X^b \quad \text{und} \quad \xi_{X \times_S Y}^b \circ i_2 = \pi_*^Y \tilde{p}_2 \circ \xi_Y^b \quad (6.1.b)$$

*eindeutig bestimmte Abbildung bezeichnet.*

*Beweis.* Für alle komplexen Räume  $(T, \pi_T)$  über  $S$  haben wir die folgenden natürlichen Isomorphismen:

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{B}}(T) &= \text{Hom}_{\mathcal{O}_T\text{-alg}}(\pi_T^*(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{B}), \mathcal{O}_T) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}_T\text{-alg}}(\pi_T^* \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_T} \pi_T^* \mathcal{B}, \mathcal{O}_T) \\ &\simeq \underbrace{\text{Hom}_{\mathcal{O}_T\text{-alg}}(\pi_T^* \mathcal{A}, \mathcal{O}_T)}_{=F_{\mathcal{A}}(T)} \times \underbrace{\text{Hom}_{\mathcal{O}_T\text{-alg}}(\pi_T^* \mathcal{B}, \mathcal{O}_T)}_{=F_{\mathcal{B}}(T)} \\ &\simeq \text{Hom}_S(T, X) \times \text{Hom}_S(T, Y) \\ &\simeq \text{Hom}_S(T, X \times_S Y) \end{aligned}$$

Das Element der Darstellung erhalten wir, indem wir für  $T = X \times_S Y$  das Bild von  $\text{id}_{X \times_S Y}$  unter den obigen Isomorphismen bestimmen:

$$\text{id}_{X \times_S Y} \simeq (p_1, p_2) \simeq (p_1^* \xi_X, p_2^* \xi_Y)$$

Analog haben wir im adjungierten Fall die folgenden natürlichen Isomorphismen:

$$\begin{aligned} G_{\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{B}}(T) &= \text{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-alg}}(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{B}, \pi_*^T \mathcal{O}_T) \\ &\simeq \underbrace{\text{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-alg}}(\mathcal{A}, \pi_*^T \mathcal{O}_T)}_{=G_{\mathcal{A}}(T)} \times \underbrace{\text{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-alg}}(\mathcal{B}, \pi_*^T \mathcal{O}_T)}_{=G_{\mathcal{B}}(T)} \\ &\simeq \text{Hom}_S(T, X) \times \text{Hom}_S(T, Y) \\ &\simeq \text{Hom}_S(T, X \times_S Y) \end{aligned}$$

Das Element der Darstellung ergibt sich wie folgt:

$$\text{id}_{X \times_S Y} \simeq (p_1, p_2) \simeq (\pi_*^X \tilde{p}_1 \circ \xi_X^b, \pi_*^Y \tilde{p}_2 \circ \xi_Y^b) \quad \square$$

**KOROLLAR 6.1.2.** *Es seien  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  endlich präsentierte  $\mathcal{O}_S$ -Algebren. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus:*

$$\text{Specan}(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \text{Specan}(\mathcal{A}) \times_S \text{Specan}(\mathcal{B})$$

In Satz 4.1.3 hatten wir gesehen, dass das analytische Urbild einer endlich präsentierte  $\mathcal{O}_S$ -Algebra wieder endlich präsentierte ist. Für das analytische Spektrum gilt in diesem Fall:

**SATZ 6.1.3.** *Es sei  $\varphi: S' \rightarrow S$  ein Morphismus von komplexen Räumen,  $\mathcal{A}$  eine endlich präsentierte  $\mathcal{O}_S$ -Algebra und  $(X, \xi)$  eine Darstellung des Funktors  $F_{\mathcal{A}}$ . Dann wird der Funktor  $F_{\varphi^* \mathcal{A}}$  durch das Paar*

$$(X \times_S S', p_1^* \xi_X)$$

*dargestellt. Dabei bezeichnet  $p_1: X \times_S S' \rightarrow X$  die Projektion auf den ersten Faktor.*

*Beweis.* Der Funktor  $F_{\varphi^* \mathcal{A}}$  ist isomorph zu  $F_{\mathcal{A}/S'}$ , denn für jeden komplexen Raum  $T$  über  $S$  haben wir die folgende natürliche Isomorphie:

$$\begin{aligned} F_{\varphi^* \mathcal{A}}(T) &= \text{Hom}_{\mathcal{O}_T\text{-alg}}(\pi_T^* \varphi^* \mathcal{A}, \mathcal{O}_T) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}_T\text{-alg}}((\varphi \circ \pi_T)^* \mathcal{A}, \mathcal{O}_T) = F_{\mathcal{A}} \circ i_{S'/S}(T) \end{aligned}$$

Die Aussage folgt somit aus Satz 2.4.3. □

**KOROLLAR 6.1.4.** *Es sei  $\varphi: S' \rightarrow S$  ein Morphismus von komplexen Räumen und  $\mathcal{A}$  eine endlich präsentierte  $\mathcal{O}_S$ -Algebra. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus:*

$$\text{Specan}(\varphi^* \mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \text{Specan}(\mathcal{A}) \times_S S'$$

**6.2. Fasern über Punkten des Basisraumes.** Sei  $S$  ein komplexer Raum,  $\mathcal{A}$  eine endlich präsentierte  $\mathcal{O}_S$ -Algebra und  $(X, \xi_X)$  eine Darstellung des Funktors  $F_{\mathcal{A}}$ . Sei weiter  $s \in S$  und  $X_s := X \times_S \{s\}$  die Faser über  $s$ . Bezeichnet  $j: X_s \hookrightarrow X$  die kanonische Injektion, dann wird nach Satz 6.1.3 der Funktor  $F_{j^* \mathcal{A}}$  durch

$$(X \times_S \{s\}, p_1^* \xi_X)$$

dargestellt. Das heißt, es gilt:  $X_s = \text{Specan}(j^* \mathcal{A})$ . Für die Punkte der Fasern gilt:

**SATZ 6.2.1.** *Es sei  $\mathcal{A}$  eine endlich präsentierte  $\mathcal{O}_S$ -Algebra und  $(X, \xi_X)$  eine Darstellung des Funktors  $F_{\mathcal{A}}$ . Dann gibt es für alle  $s \in S$  eine Bijektion zwischen den Punkten der Faser über  $s$  und den maximalen Idealen von  $\mathcal{A}_s$ , welche  $\mathfrak{m}_{S,s} \mathcal{A}_s$  enthalten:*

$$\begin{aligned} X_s = X \times_S \{s\} &\xrightarrow{\sim} \{ \mathfrak{p} \subset \mathcal{A}_s : \mathfrak{p} \text{ maximal, } \mathfrak{p} \supset \mathfrak{m}_{S,s} \mathcal{A}_s \} \\ x &\mapsto (\xi_{X,x}^b)^{-1}(\mathfrak{m}_{X,x}) \end{aligned}$$

*Beweis.* Der Funktor  $F_{j^*\mathcal{A}}$  wird durch das Paar  $X_s = X \times_S \{s\}$  dargestellt. Das bedeutet, wir haben insbesondere für den komplexen Raum  $\{s\}$  eine Bijektion:

$$h_{X_s}(\{s\}) = \text{Hom}_{\{s\}}(\{s\}, X_s) \xrightarrow{\beta_{j^*\mathcal{A}}(\{s\})} \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(j^*\mathcal{A}, \mathbb{C}) = F_{j^*\mathcal{A}}(\{s\})$$

Da der komplexe Raum  $\{s\}$  reduziert ist, sind die holomorphen Abbildungen  $\{s\} \rightarrow X_s$  bereits durch die Abbildungen der unterliegenden topologischen Räume eindeutig bestimmt [CAG, 0.20, S. 15]. Demnach erhalten wir eine Bijektion

$$X_s \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\{s\}}(\{s\}, X_s),$$

indem wir jedem  $x \in X_s$  die Abbildung  $s \mapsto x$  zuordnen. Betrachten wir nun die  $\mathbb{C}$ -Algebromorphismen  $j^*\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ . Diese stehen in Bijektion zu den maximalen Idealen von  $j^*\mathcal{A}$  und es gilt:

$$j^*\mathcal{A} \simeq j^{-1}\mathcal{A} \otimes_{j^{-1}\mathcal{O}_S} \mathbb{C} \simeq \mathcal{A}_s \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} \mathcal{O}_{S,s}/\mathfrak{m}_{S,s} \simeq \mathcal{A}_s/\mathfrak{m}_{S,s}\mathcal{A}_s$$

Wir erhalten somit die folgenden Bijektionen:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(j^*\mathcal{A}, \mathbb{C}) &\simeq \{ \mathfrak{q} \subset \mathcal{A}_s/\mathfrak{m}_{S,s} : \mathfrak{q} \text{ maximal} \} \\ &\simeq \{ \mathfrak{p} \subset \mathcal{A}_s : \mathfrak{p} \text{ maximal, } \mathfrak{p} \supset \mathfrak{m}_{S,s}\mathcal{A}_s \} \end{aligned}$$

Sei  $f \in \text{Hom}_{\{s\}}(\{s\}, X_s)$  und  $x := f(s)$ . Dann gilt für das Bild der Abbildung  $f$  in  $\text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(j^*\mathcal{A}, \mathbb{C})$ :

$$\begin{aligned} [\beta_{j^*\mathcal{A}}(\{s\})](f) &= f^*(p_1^*\xi_X) \simeq (p_1 \circ f)^{-1}\xi_X \otimes_{(p_1 \circ f)^{-1}\mathcal{O}_X} \text{id}_{\mathbb{C}} \\ &\simeq \xi_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \text{id}_{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

Anhand des folgenden kommutativen Diagrammes

$$\begin{array}{ccccc} & & \xi_{X,x}^b & & \\ & \searrow & \text{---} & \nearrow & \\ \mathcal{A}_s & \xrightarrow{\text{id} \otimes 1} & \mathcal{A}_s \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} \mathcal{O}_{X,x} & \xrightarrow{\xi_{X,x}} & \mathcal{O}_{X,x} \\ \text{id} \otimes 1 \downarrow & & \downarrow \text{id} \otimes 1 & & \downarrow \text{id} \otimes 1 \\ \underbrace{\mathcal{A}_s \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} \mathbb{C}}_{\simeq \mathcal{A}_s/\mathfrak{m}_{S,s}\mathcal{A}_s} & \xrightarrow{\sim} & \underbrace{(\mathcal{A}_s \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} \mathcal{O}_{X,x}) \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathbb{C}}_{\simeq \mathcal{A}_s/\mathfrak{m}_{S,s}\mathcal{A}_s \simeq j^*\mathcal{A}} & \xrightarrow{\xi_{X,x} \otimes \text{id}} & \underbrace{\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathbb{C}}_{\simeq \mathbb{C}} \end{array}$$

sehen wir, dass die Abbildung  $f^*(p_1^*\xi_X) = \xi_{X,x} \otimes \text{id}_{\mathbb{C}}$  durch das maximale Ideal  $(\xi_{X,x}^b)^{-1}(\mathfrak{m}_{X,x}) \otimes \mathbb{C}$  induziert wird.  $\square$

Für  $x \in X_s$  sei  $\mathfrak{p} := (\xi_{X,x}^b)^{-1}(\mathfrak{m}_{X,x})$ . Dann ist  $\xi_{X,x}^b(a)$  für alle  $a \in \mathcal{A}_s - \mathfrak{p}$  eine Einheit in  $\mathcal{O}_{X,x}$ . Folglich faktorisiert  $\xi_{X,x}^b$  über die Lokalisation von  $\mathcal{A}_s$  bezüglich  $\mathfrak{p}$  (siehe z.B. [ICA, Proposition 3.1, S. 37]):

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_s & \xrightarrow{\xi_{X,x}^b} & \mathcal{O}_{X,x} \\ & \searrow a \mapsto \frac{a}{1} & \nearrow \varphi_{X,x} \\ & & (\mathcal{A}_s)_{\mathfrak{p}} \end{array}$$

Für die Komplettierung der Abbildung  $\varphi_{X,x}$  gilt:

**SATZ 6.2.2.** Die Abbildung  $\widehat{\varphi}_x : \widehat{(\mathcal{A}_s)_{\mathfrak{p}}} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{O}_{X,x}}$  ist ein Isomorphismus.

*Beweis.* Da es sich um eine lokale Aussage handelt, können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $\mathcal{A} \simeq \mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n]/\mathcal{I}$  ist, wobei  $\mathcal{I}$  ein Ideal ist, welches von globalen Schnitten  $f_1, \dots, f_m \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n])$  erzeugt wird. Sei  $s := \pi_X(x)$ , dann ist  $\mathcal{A}_s \simeq \mathcal{O}_{S,s}[t_1, \dots, t_n]/\mathcal{I}_s$ , und wir haben das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen (vgl. (4.3.b)):

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{I}_s & \longrightarrow & \mathcal{O}_{S,s}[t_1, \dots, t_n] & \xrightarrow{p} & \mathcal{A}_s \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \xi_{\mathbb{C}^n \times S, s}^b \downarrow & & \downarrow \xi_{X, x}^b \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{I}_x & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times S, x} & \xrightarrow{\tilde{j}_x} & \mathcal{O}_{X, x} \longrightarrow 0 \end{array} \quad (6.2.a)$$

Dabei ist  $\mathcal{I}_s$  das von  $\xi_{X, x}^b(\mathcal{I}_s)$  in  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times S, x}$  erzeugte Ideal. Es bezeichne nun  $s_1, \dots, s_l$  die Erzeuger des maximalen Ideales  $\mathfrak{m}_{S, s}$ . Dann wird das Ideal

$$\mathfrak{q} := (\xi_{\mathbb{C}^n \times S, s}^b)^{-1}(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}^n \times S, s})$$

von  $s_1, \dots, s_l, t_1 - x_1, \dots, t_n - x_n$  erzeugt, wobei  $x_i := (\tilde{p}_1(z_i))(x) \in \mathbb{C}$  der Wert von  $\tilde{p}_1(z_i)$  an der Stelle  $x$  ist. Da Lokalisation exakt ist, erhalten wir aus (6.2.a) das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (\mathcal{I}_s)_\mathfrak{q} & \longrightarrow & (\mathcal{O}_{S,s}[t_1, \dots, t_n])_\mathfrak{q} & \longrightarrow & (\mathcal{A}_s)_\mathfrak{p} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \varphi_{\mathbb{C}^n \times S, x} \downarrow & & \downarrow \varphi_{X, x} \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{I}_x & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times S, x} & \xrightarrow{\tilde{j}_x} & \mathcal{O}_{X, x} \longrightarrow 0 \end{array} \quad (6.2.b)$$

Es bezeichne  $\mathfrak{n}$  das maximale Ideal von  $(\mathcal{O}_{S,s}[t_1, \dots, t_n])_\mathfrak{q}$ . Dann wird  $\mathfrak{n}$  von den Elementen

$$\frac{s_1}{1}, \dots, \frac{s_l}{1}, \frac{t_1 - x_1}{1}, \dots, \frac{t_n - x_n}{1}$$

erzeugt, und wir haben:

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbb{C}^n \times S, x} \left( \frac{s_j}{1} \right) &= \xi_{\mathbb{C}^n \times S, x}^b(s_j) = s_j \\ \varphi_{\mathbb{C}^n \times S, x} \left( \frac{t_i - x_i}{1} \right) &= \xi_{\mathbb{C}^n \times S, x}^b(t_i - x_i) = \tilde{p}_1(z_i) - x_i \end{aligned}$$

Die Bilder der Erzeuger von  $\mathfrak{n}$  sind somit gerade die Erzeuger des maximalen Ideales  $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}^n \times S, x}$ . Wir sehen somit, dass  $\varphi_{\mathbb{C}^n \times S, x}$  für  $k \geq 0$  einen Isomorphismus von  $\mathbb{C}$ -Vektorräumen

$$\mathfrak{n}^k / \mathfrak{n}^{k+1} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{m}_{X, x}^k / \mathfrak{m}_{X, x}^{k+1}$$

induziert. Insbesondere ist die induzierte Abbildung der assoziierten graduierten Ringe bijektiv. Mit [ICA, Lemma 10.23, S. 112] folgt, dass  $\widehat{\varphi}_{\mathbb{C}^n \times S, x}$  ein Isomorphismus ist. Da das Bild von  $(\mathcal{I}_s)_\mathfrak{q}$  unter  $\varphi_{\mathbb{C}^n \times S, x}$  das Ideal  $\mathcal{I}_x$  erzeugt, induziert  $\widehat{\varphi}_{\mathbb{C}^n \times S, x}$  einen Isomorphismus:

$$\widehat{(\mathcal{I}_s)_\mathfrak{q}} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{I}_x}$$

In der Kompletzierung des Diagrammes (6.2.b) sind also die beiden linken vertikalen Abbildungen Isomorphismen. Folglich ist auch die rechte Abbildung, das heißt  $\widehat{\varphi}_{X, x}$ , ein Isomorphismus.  $\square$

## § 7. Spezielle Abbildungen

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass der Strukturmorphismus, Projektionen, die Diagonalabbildung und die konstanten Abbildungen von analytischen Spektren durch Morphismen der endlich präsentierten Algebren induziert werden.

**7.1. Strukturmorphismus.** Sei  $S$  ein komplexer Raum und  $\mathcal{A}$  eine endlich präsentierte  $\mathcal{O}_S$ -Algebra sowie  $(X, \pi_X) := \text{Specan}(\mathcal{A})$  das analytische Spektrum von  $\mathcal{A}$ . Betrachten wir die kanonische Abbildung  $\pi_{\mathcal{A}}: \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{A}$ . Dann ist  $\text{Specan}(\pi_{\mathcal{A}}): X \rightarrow S$  gegeben durch  $\pi_X$ , denn die Menge  $\text{Hom}_S(X, S)$  hat genau ein Element.

**7.2. Projektionen.** Sei  $S$  ein komplexen Raum, und seien  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  endlich präsentierte  $\mathcal{O}_S$ -Algebren sowie  $X := \text{Specan}(\mathcal{A})$  und  $Y := \text{Specan}(\mathcal{B})$  die analytischen Spektren von  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$ . Ist

$$i_1 : \begin{cases} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{B} \\ a & \longmapsto & a \otimes 1 \end{cases}$$

die erste kanonische Injektion, dann ist  $\text{Specan}(i_1) = p_1$ , wobei  $p_1: X \times_S Y \rightarrow X$  die Projektion auf den ersten Faktor bezeichnet. Dies folgt aus Satz 5.4.1, denn es gilt

$$\xi_{X \times_S Y}^b \circ i_1 \stackrel{(6.1.b)}{=} \pi_*^X \tilde{p}_1 \circ \xi_X^b,$$

und somit ist (5.4.c) kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{i_1} & \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{B} \\ \xi_X^b \downarrow & & \downarrow \xi_{X \times_S Y}^b \\ \pi_*^X \mathcal{O}_X & \xrightarrow{\pi_*^X \tilde{p}_1} & \pi_*^{X \times_S Y} \mathcal{O}_{X \times_S Y} \end{array}$$

Entsprechend gilt für die zweite kanonische Injektion  $\text{Specan}(i_2) = p_2$ , wobei  $p_2: X \times_S Y \rightarrow Y$  die Projektion auf den zweiten Faktor bezeichnet.

**7.3. Diagonalabbildung.** Sei  $S$  ein komplexer Raum und  $\mathcal{A}$  eine endlich präsentierte  $\mathcal{O}_S$ -Algebra sowie  $X := \text{Specan}(\mathcal{A})$  das analytische Spektrum von  $\mathcal{A}$ . Wir definieren:

$$\Delta_{\mathcal{A}} : \begin{cases} \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ a \otimes b & \longmapsto & a \cdot b \end{cases}$$

Für  $k = 1, 2$  bezeichne  $p_k: X \times_S X \rightarrow X$  die Projektion auf den  $k$ -ten Faktor und  $i_k: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}$  die  $k$ -te kanonische Injektion. Dann gilt:

$$\begin{aligned} p_k \circ \text{Specan}(\Delta_{\mathcal{A}}) &= \text{Specan}(i_k) \circ \text{Specan}(\Delta_{\mathcal{A}}) = \text{Specan}(\Delta_{\mathcal{A}} \circ i_k) \\ &= \text{Specan}(\text{id}_{\mathcal{A}}) = \text{id}_X \end{aligned}$$

Folglich ist  $\text{Specan}(\Delta_{\mathcal{A}})$  die Diagonalabbildung  $\Delta_X: X \rightarrow X \times_S X$ .

**7.4. Konstante Abbildungen nach  $\mathbb{C} \times S$ .** Sei  $S$  ein komplexer Raum und  $\mathcal{A}$  eine endlich präsentierte  $\mathcal{O}_S$ -Algebra sowie  $X := \text{Specan}(\mathcal{A})$  das analytische Spektrum von  $\mathcal{A}$ . Wir definieren für  $\lambda \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ :

$$\lambda_{\mathcal{A}} : \begin{cases} \mathcal{O}_S[t] & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ t & \longmapsto & \lambda \end{cases}$$

Bezeichnet  $\lambda_X: X \rightarrow \mathbb{C} \times S$  die durch  $\lambda \cdot 1 \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$  induzierte Abbildung, dann gilt  $\text{Specan}(\lambda_{\mathcal{A}}) = \lambda_X$ , denn es gilt

$$\tilde{\lambda}_X(\mathfrak{z}) = \lambda \cdot 1 = \xi_X \circ \lambda_{\mathcal{A}}(t),$$

und somit folgt die Behauptung aus Korollar 5.4.2.

## Komplex analytische Kegel

In diesem Kapitel führen wir den Begriff des komplex analytischen Kegels ein. Wir beginnen mit der Definition eines Kegels als algebraische Struktur in der Kategorie der Mengen und übertragen dann diese Definition eines Kegels auf die Kategorie der komplexen Räume über  $S$ .

### § 8. Kegel in der Kategorie der Mengen

Wir geben in diesem Paragraphen zunächst die Definition eines Kegels und betrachten dann speziell Kegel, die Teilmenge eines  $\mathbb{C}^n$  sind.

**8.1. Kegel als algebraische Struktur.** Im Folgenden bezeichne  $A$  einen kommutativen Ring mit Eins. Ein  $A$ -Kegel ist ein Tripel  $(X, \mu, e)$  bestehend aus einer Menge  $X$ , einer Verknüpfung

$$\mu : \begin{cases} A \times X & \longrightarrow X \\ (\lambda, x) & \longmapsto \lambda x \end{cases},$$

genannt *Multiplikation*, und einem ausgezeichnetem Element  $e \in X$ , genannt die *Spitze* des Kegels, so dass für alle  $\lambda_1, \lambda_2 \in A$  und alle  $x \in X$  die folgenden Axiome erfüllt sind:

$$(\lambda_1 \lambda_2)x = \lambda_1(\lambda_2 x) \quad (8.1.a)$$

$$1x = x \quad (8.1.b)$$

$$0x = e \quad (8.1.c)$$

Jeder unitäre  $A$ -Modul über einem kommutativen Ring mit Eins ist ein  $A$ -Kegel mit dem neutralen Element der Addition als Spitze. Insbesondere ist jeder kommutative Ring mit Eins ein Kegel über sich selbst.

Ein  $A$ -Kegel  $Y$  heißt  *$A$ -Unterkegel von  $X$* , wenn  $Y \subset X$  ist und die von  $X$  auf  $Y$  induzierte Multiplikation mit der von  $Y$  übereinstimmt. Eine Abbildung  $\varphi: X \rightarrow Y$  von  $A$ -Kegeln heißt  *$A$ -Kegelhomomorphismus*, wenn für alle  $\lambda \in A$  und alle  $x \in X$  gilt:

$$\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$$

LEMMA 8.1.1. *Es sei  $\varphi: X \rightarrow Y$  ein  $A$ -Kegelhomomorphismus. Dann ist  $\ker \varphi$  ein  $A$ -Unterkegel von  $X$  und  $\text{im } \varphi$  ein  $A$ -Unterkegel von  $Y$ .*

**8.2. Kegel im  $\mathbb{C}^n$ .** Sei  $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{N}^n$ . Dann heißt die Abbildung

$$\mu_{\mathbb{C}^n}^p : \begin{cases} \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n & \longrightarrow \mathbb{C}^n \\ (\lambda, x_1, \dots, x_n) & \longmapsto (\lambda^{p_1} x_1, \dots, \lambda^{p_n} x_n) \end{cases} \quad (8.2.a)$$

gewichtete *Multiplikation vom Typ  $p$*  und induziert eine  $\mathbb{C}$ -Kegelstruktur mit Spitze 0 auf dem  $\mathbb{C}^n$ .

Sind  $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{N}^n$  und  $q = (q_1, \dots, q_m) \in \mathbb{N}^m$ , so heißt eine Abbildung

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$$

quasi-homogen vom Typ  $p$  mit Grad  $q$ , wenn

$$\varphi_j(\lambda^{p_1} z_1, \dots, \lambda^{p_m} z_m) = \lambda^{q_j} \varphi_j(z_1, \dots, z_m)$$

für  $j = 1, \dots, m$  und alle  $\lambda, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$  ist. Versehen wir  $\mathbb{C}^n$  und  $\mathbb{C}^m$  mittels gewichteter Multiplikationen vom Typ  $p$  bzw.  $q$  mit einer  $\mathbb{C}$ -Kegelstruktur, so ist eine quasi-homogene Abbildung vom Typ  $p$  mit Grad  $q$  insbesondere ein  $\mathbb{C}$ -Kegelhomomorphismus. Zusammen mit Lemma 8.1.1 folgt damit unmittelbar:

**LEMMA 8.2.1.** *Es sei  $\varphi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$  eine quasi-homogene Abbildung vom Typ  $p$  mit Grad  $q$ . Dann ist die Nullstellenmenge von  $\varphi$  ein  $\mathbb{C}$ -Unterkegel des  $\mathbb{C}^n$  mit gewichteter Multiplikation vom Typ  $p$ .*

*Bemerkung.* Für den Fall, dass die Multiplikation als komplex-differenzierbar vorausgesetzt wird, werden wir in Korollar 12.4.3 von Kapitel IV sehen, dass die  $\mathbb{C}$ -Kegel, welche Teilmenge eines  $\mathbb{C}^n$  sind, genau die  $\mathbb{C}$ -Unterkegel des  $\mathbb{C}^n$  mit geeigneter gewichteter Multiplikation sind.

## § 9. Komplex analytische Kegel

Ausgehend von der Definition eines Kegels in der Kategorie der Mengen geben wir die Definition eines komplex analytischen Kegels zunächst in funktorieller Sprache. Wir zeigen dann, dass komplex analytische Kegel auch mittels geeigneter kommutativer Diagramme beschrieben werden können. Abschließend definieren wir Kegelmorphismen und betrachten einige Eigenschaften von komplex analytischen Kegeln.

**9.1. Definition komplex analytischer Kegel.** Sei  $S$  ein komplexer Raum. Ein *komplex analytischer Kegel über  $S$*  ist ein komplexer Raum  $X$  über  $S$  zusammen mit einer funktoriellen  $h_{\mathbb{C} \times S}(T)$ -Kegelstruktur auf  $h_X(T)$  für alle komplexen Räume  $T$  über  $S$ . Das heißt, dass  $(h_X(T), h_{\mu_X}(T), 0_{h_X(T)})$  für alle komplexen Räume  $T$  über  $S$  ein  $h_{\mathbb{C} \times S}(T)$ -Kegel ist und zusätzlich  $h_{\mu_X}$  und

$$h_{e_X}(T) : \begin{cases} h_S(T) & \longrightarrow & h_X(T) \\ \pi_T & \longmapsto & 0_{h_X(T)} \end{cases}$$

funktorielle Morphismen sind.

Die Kategorie der komplexen Räume über  $S$  ist eine Kategorie mit endlichen Produkten und einem Endobjekt, gegeben durch  $S$ . Wie der nächste Satz zeigt, können komplex analytische Kegel auch durch kommutative Diagramme charakterisiert werden.

**SATZ 9.1.1.** *Ein komplexer Raum  $(X, \pi_X)$  über  $S$  ist genau dann ein komplex analytischer Kegel über  $S$ , wenn es Morphismen  $\mu_X : (\mathbb{C} \times S) \times_S X \rightarrow X$  und  $e_X : S \rightarrow X$  von komplexen Räumen über  $S$  gibt, so dass die Diagramme*

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C} \times S) \times_S (\mathbb{C} \times S) \times_S X & \xrightarrow{\mu_{\mathbb{C} \times S} \times \text{id}_X} & (\mathbb{C} \times S) \times_S X \\ \text{id}_{\mathbb{C} \times S} \times \mu_X \downarrow & & \downarrow \mu_X \\ (\mathbb{C} \times S) \times_S X & \xrightarrow{\mu_X} & X \end{array} \quad (9.1.a)$$

$$\begin{array}{ccc}
X \times_S X & \xrightarrow{1_X \times \text{id}_X} & (\mathbb{C} \times S) \times_S X \\
\Delta_X \uparrow & & \downarrow \mu_X \\
X & \xrightarrow{\text{id}_X} & X
\end{array} \quad (9.1.b)$$

$$\begin{array}{ccc}
X \times_S X & \xrightarrow{0_X \times \text{id}_X} & (\mathbb{C} \times S) \times_S X \\
\Delta_X \uparrow & & \downarrow \mu_X \\
X & \xrightarrow{e_X \circ \pi_X} & X
\end{array} \quad (9.1.c)$$

kommutativ sind. Dabei bezeichnet  $\Delta_X: X \rightarrow X \times_S X$  die Diagonalabbildung,  $\mu_{\mathbb{C} \times S}: \mathbb{C} \times S \rightarrow \mathbb{C} \times S$  die auf  $\mathbb{C} \times S$  durch  $\mathbb{C}$  induzierte Multiplikation und  $0_X, 1_X: X \rightarrow \mathbb{C} \times S$  bezeichnen die konstanten Funktionen.

*Beweis.* Erfolgt analog zum Beweis der entsprechenden Aussage für Objekte mit Gruppenstruktur. Siehe z.B. [TCF, Theorem 4.1, S. 75].  $\square$

Wir nennen die Abbildung  $\mu_X: (\mathbb{C} \times S) \times_S X \rightarrow X$  die *Multiplikation* und die Abbildung  $e_X: S \rightarrow X$  die *Spitze* des Kegels.

*Bemerkung.* Nach Satz 2.4.1 haben wir für einen komplexen Raum  $X$  über  $S$  die folgenden natürliche Isomorphismen:

$$\begin{aligned}
(\mathbb{C} \times S) \times_S X &\xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \times X \\
(\mathbb{C} \times S) \times_S (\mathbb{C} \times S) \times_S X &\xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times X
\end{aligned}$$

Fassen wir die Multiplikation von  $X$  als Abbildung  $\mathbb{C} \times X \rightarrow X$  auf, so können wir die drei kommutativen Diagramme (9.1.a) - (9.1.c) auch wie folgt formulieren:

$$\mu_X \circ (\mu_{\mathbb{C}} \times \text{id}_X) = \mu_X \circ (\text{id}_{\mathbb{C}} \times \mu_X) \quad (9.1.d)$$

$$\mu_X \circ (1_X \times \text{id}_X) \circ \Delta_X = \text{id}_X \quad (9.1.e)$$

$$\mu_X \circ (0_X \times \text{id}_X) \circ \Delta_X = e_X \circ \pi_X \quad (9.1.f)$$

Dabei bezeichnet  $\mu_{\mathbb{C}}$  die Multiplikation in  $\mathbb{C}$  und  $0_X, 1_X: X \rightarrow \mathbb{C}$  bezeichnen die konstanten Funktionen.

**9.2. Elementweise Multiplikation.** Sei  $X$  ein komplex analytischer Kegel über  $S$  und  $\lambda \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ . Bezeichnet  $\lambda_X: X \rightarrow \mathbb{C} \times S$  die durch  $\lambda$  induzierte Abbildung, dann erhalten wir durch die Komposition der Abbildungen

$$X \xrightarrow{\Delta_X} X \times_S X \xrightarrow{\lambda_X \times \text{id}} (\mathbb{C} \times S) \times_S X \xrightarrow{\mu_X} X$$

eine Abbildung  $\mu_X^\lambda: X \rightarrow X$ , welche wir als *elementweise Multiplikation mit  $\lambda$*  bezeichnen. Anhand der Kegelaxiome (9.1.a) - (9.1.c) ergeben sich unmittelbar die folgenden Eigenschaften:

$$\mu_X^\lambda \circ \mu_X^\eta = \mu_X^{\lambda\eta} \quad \text{für alle } \lambda, \eta \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$$

$$\mu_X^1 = \text{id}_X$$

$$\mu_X^0 = e_X \circ \pi_X$$

**9.3. Die  $\mathcal{O}_S$ -Algebra  $\mathcal{O}_{X|S}$ .** Sei  $(X, \pi_X)$  ein komplex analytischer Kegel über  $S$  mit Multiplikation  $\mu_X$  und Spitze  $e_X$ . Dann ist  $e_X$  ein Schnitt der Projektion  $\pi_X$ , denn aus der Kommutativität von

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h}_S(T) & \xrightarrow{\mathfrak{h}_{e_X}(T)} & \mathfrak{h}_X(T) \\ & \searrow \mathfrak{h}_{\text{id}_S}(T) & \swarrow \mathfrak{h}_{\pi_X}(T) \\ & & \mathfrak{h}_S(T) \end{array}$$

für alle komplexen Räume  $T$  über  $S$  folgt mittels Korollar 2.2.2, dass  $\pi_X \circ e_X = \text{id}_S$  ist. Insbesondere ist  $e_X$  ein Monomorphismus. Das heißt  $|e_X|$  ist injektiv und  $\tilde{e}_X$  surjektiv. Außerdem ist  $|e_X(S)|$  abgeschlossen in  $X$  und daher ist die Spitze  $e_X$  eine abgeschlossene Einbettung von  $S$  in  $X$ .

Indem wir  $S$  mit  $e_X(S)$  identifizieren, können wir im Folgenden ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $S$  als abgeschlossener komplexer Unterraum von  $X$  gegeben ist.

Sei also  $S$  als komplexer Unterraum von  $X$  gegeben, und bezeichne  $\mathcal{I}$  das Nullstellenideal von  $S$ . Dann gilt  $e_X^{-1}\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{X|S}$  und wir haben die folgende kurze exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_S \xrightarrow{\iota} \mathcal{O}_{X|S} \xrightarrow{\hat{e}_X} \mathcal{O}_S \longrightarrow 0 \quad (9.3.a)$$

Durch die Abbildung  $e_X^{-1}\hat{\pi}_X := \hat{\pi}_{X|S}: \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_{X|S}$  wird  $\mathcal{O}_{X|S}$  eine  $\mathcal{O}_S$ -Algebra und  $\hat{e}_X$  ein  $\mathcal{O}_S$ -Algebromorphismus. Insbesondere gilt:

$$\hat{e}_X \circ \hat{\pi}_{X|S} = \hat{e}_X \circ e_X^{-1}\hat{\pi}_X = \widehat{\pi_X \circ e_X} = \widehat{\text{id}_S} = \text{id}_{\mathcal{O}_S}$$

Folglich spaltet die kurze exakte Sequenz (9.3.a) und wir erhalten:

$$\mathcal{O}_{X|S} = \hat{\pi}_{X|S}(\mathcal{O}_S) \oplus \iota(\mathcal{I}_S) \simeq \mathcal{O}_S \oplus \mathcal{I}_S \quad (9.3.b)$$

**9.4. Morphismen von komplex analytischen Kegeln.** Seien  $X, Y$  komplex analytische Kegel über  $S$ . Wir nennen einen Morphismus  $f: X \rightarrow Y$  von komplexen Räumen über  $S$  einen *Morphismus komplex analytischer Kegel über  $S$* , wenn  $\mathfrak{h}_f(T)$  für alle komplexen Räume  $T$  über  $S$  ein  $\mathfrak{h}_{\mathbb{C} \times S}(T)$ -Kegelhomomorphismus in der Kategorie der Mengen ist. Die komplex analytischen Kegel über  $S$  bilden mit den Morphismen von komplex analytischen Kegel über  $S$  eine Kategorie, welche wir mit  $\mathfrak{C}\hat{\text{on}}\mathfrak{e}_S$  bezeichnen.

**SATZ 9.4.1.** *Es seien  $X$  und  $Y$  komplex analytische Kegel über  $S$  mit Multiplikationen  $\mu_X$  und  $\mu_Y$ . Ein Morphismus  $f: X \rightarrow Y$  von komplexen Räumen über  $S$  ist genau dann ein Morphismus von komplex analytischen Kegeln über  $S$ , wenn das folgende Diagramm kommutativ ist:*

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C} \times S) \times_S X & \xrightarrow{\mu_X} & X \\ \text{id} \times f \downarrow & & \downarrow f \\ (\mathbb{C} \times S) \times_S Y & \xrightarrow{\mu_Y} & Y \end{array} \quad (9.4.a)$$

*Beweis.* Für einen komplexen Raum  $T$  ist  $h_f(T)$  genau dann ein  $h_{\mathbb{C} \times S}(T)$ -Kegelhomomorphismus, wenn das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} h_{\mathbb{C} \times S}(T) \times h_X(T) & \xrightarrow{h_{\mu_X(T)}} & h_X(T) \\ h_{\text{id}(T)} \times h_f(T) \downarrow & & \downarrow h_f(T) \\ h_{\mathbb{C} \times S}(T) \times h_Y(T) & \xrightarrow{h_{\mu_Y(T)}} & h_Y(T) \end{array}$$

Nach Korollar 2.2.2 ist dieses Diagramm genau dann für jeden komplexen Raum  $T$  über  $S$  kommutativ, wenn das Diagramm (9.4.a) kommutativ ist.  $\square$

**KOROLLAR 9.4.2.** *Es sei  $X$  ein komplex analytischer Kegel über  $S$  mit Multiplikation  $\mu_X$ . Dann ist  $\mu_X^\lambda$  für alle  $\lambda \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$  ein Morphismus von komplex analytischen Kegeln über  $S$ . Ist  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ , so ist  $\mu_X^\lambda$  ein Isomorphismus.*

*Beweis.* Für alle  $\lambda \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$  ist das folgende Diagramm kommutativ und somit  $\mu_X^\lambda$  nach Satz 9.4.1 ein Morphismus von komplex analytischen Kegeln über  $S$ :

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{C} \times S) \times_S X & \xrightarrow{\text{id} \times (\lambda_X, \text{id})} & (\mathbb{C} \times S) \times_S (\mathbb{C} \times S) \times_S X & \xrightarrow{\text{id} \times \mu_X} & (\mathbb{C} \times S) \times_S X \\ \mu_X \downarrow & & & & \downarrow \mu_X \\ X & \xrightarrow{(\lambda_X, \text{id}_X)} & (\mathbb{C} \times S) \times_S X & \xrightarrow{\mu_X} & X \end{array}$$

Ist  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  so gilt  $\mu_X^\lambda \circ \mu_X^{\lambda^{-1}} = \text{id}_X = \mu_X^{\lambda^{-1}} \circ \mu_X^\lambda$ .  $\square$

**KOROLLAR 9.4.3.** *Es sei  $f: X \rightarrow Y$  ein Morphismus von komplex analytischen Kegeln  $X$  und  $Y$  über  $S$  mit Multiplikationen  $\mu_X$  und  $\mu_Y$ . Dann gilt für alle  $\lambda \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ :*

$$f \circ \mu_X^\lambda = \mu_Y^\lambda \circ f$$

*Beweis.* In dem folgenden Diagramm sind das linke und das rechte Rechteck kommutativ:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\Delta_X} & X \times_S X & \xrightarrow{\lambda_X \times \text{id}} & (\mathbb{C} \times S) \times_S X & \xrightarrow{\mu_X} & X \\ f \downarrow & & f \times f \downarrow & & \downarrow \text{id} \times f & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{\Delta_Y} & Y \times_S Y & \xrightarrow{\lambda_Y \times \text{id}} & (\mathbb{C} \times S) \times_S Y & \xrightarrow{\mu_Y} & Y \end{array}$$

Die Kommutativität des mittleren Rechtecks und damit die Kommutativität des äußeren Rechtecks ergibt sich nun wie folgt:

$$\begin{aligned} (\lambda_Y \times_S \text{id}_X) \circ (f \times_S f) &= (\lambda_Y \circ f) \times_S f = \lambda_X \times_S f \\ &= (\text{id}_{\mathbb{C} \times S} \times_S f) \circ (\lambda_X \times_S \text{id}_X) \end{aligned} \quad \square$$

**SATZ 9.4.4.** *Es sei  $f: X \rightarrow Y$  ein Morphismus von komplex analytischen Kegeln über  $S$ , dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (1) *Der Morphismus  $f$  ist genau dann eine abgeschlossene Einbettung, wenn der  $\mathcal{O}_S$ -Algebromorphismus  $\hat{f}|_S: \mathcal{O}_Y|_S \rightarrow \mathcal{O}_X|_S$  surjektiv ist.*
- (2) *Der Morphismus  $f$  ist genau dann ein Isomorphismus, wenn der  $\mathcal{O}_S$ -Algebromorphismus  $\hat{f}|_S: \mathcal{O}_Y|_S \rightarrow \mathcal{O}_X|_S$  bijektiv ist.*

*Beweis.* (1) Die Notwendigkeit der Voraussetzung ist klar. Sei also umgekehrt  $\hat{f}|_S: \mathcal{O}_Y|_S \rightarrow \mathcal{O}_X|_S$  surjektiv. Wir zeigen, dass  $f$  eine Immersion ist. Sei dazu  $x \in X$ ,  $y := f(x)$  und  $s := \pi_X(x)$ . Da  $\hat{f}_s$  surjektiv ist, ist  $f$  eine Immersion in  $s$  [CAG, 0.23, S. 19]. Es gibt also eine Umgebungen  $U$  von  $s$  in  $X$  und eine Umgebung  $V$  von  $s$  in  $Y$ , so dass  $f|_U: U \rightarrow V$  eine abgeschlossene Einbettung ist. Aufgrund der Stetigkeit von  $|\mu_X|$  und  $|\mu_Y|$  gibt es ein  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  und eine Umgebungen  $W$  von  $x$ , so dass  $\mu_X^\lambda(W) \subset U$  und  $\mu_Y^\lambda(y) \in V$  ist. Dann ist  $\mu_Y^\lambda(f(W)) = f \circ \mu_X^\lambda(W) \subset f(U)$  und somit

$$f|_W = \mu_{Y|V}^{\lambda^{-1}} \circ f|_U \circ \mu_{X|W}^\lambda, \quad (9.4.b)$$

eine abgeschlossene Einbettung, da  $\mu_X^\lambda$  und  $\mu_Y^\lambda$  Isomorphismen sind. Betrachten wir nun die Injektivität. Da  $f$  ein  $S$ -Morphismus ist, reicht es Punkte in der gleichen Faser zu betrachten. Sei also  $x' \in \pi_X^{-1}(s)$  ein weiterer Punkt mit  $x \neq x'$ . Nachdem wir  $\lambda$  gegebenenfalls verkleinert haben, können wir annehmen, dass  $\mu_X^\lambda(x)$  und  $\mu_X^\lambda(x')$  in  $U$  liegen. Dann ergibt sich:

$$f(x) = \mu_Y^{\lambda^{-1}} \circ f \circ \mu_X^\lambda(x) \neq \mu_Y^{\lambda^{-1}} \circ f \circ \mu_X^\lambda(x') = f(x')$$

Es bleibt somit zu zeigen, dass  $f$  abgeschlossen ist. Wir zeigen dazu, dass  $f$  eigentlich ist [BGT, I, § 10.1, Proposition 2, S. 98]. Nach [CAS, 9.2.4, S. 175] ist  $f$  eigentlich, wenn für alle  $y \in Y$  eine Umgebung  $K$  existiert, so dass  $f^{-1}(K)$  kompakt ist. Sei also  $y \in \pi_Y^{-1}(s)$ . Dann gibt es ein  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  und eine Umgebung  $W$  von  $y$ , so dass  $\mu_Y^\lambda(W) \subset V$  ist. Da  $Y$  lokal kompakt ist, existiert eine kompakte Umgebung  $K$  von  $y$  mit  $K \subset W$  [BGT, I, § 9.7, Proposition 9, S. 90]. Dann ist

$$f^{-1}(K) = \mu_X^{\lambda^{-1}} \circ f \circ \mu_Y^\lambda(K)$$

kompakt, denn  $f|_U: U \rightarrow V$  ist als abgeschlossene Einbettung insbesondere eigentlich.

(2) Die Notwendigkeit der Voraussetzung ist auch hier klar. Sei also umgekehrt  $\hat{f}|_S: \mathcal{O}_Y|_S \rightarrow \mathcal{O}_X|_S$  bijektiv. Dann ist  $f$  nach (2) eine abgeschlossene Einbettung und anhand von (9.4.b) sehen wir, dass  $f$  lokal biholomorph ist.  $\square$

**9.5. Produkte von komplex analytischen Kegeln.** Sei  $A$  ein kommutativer Ring mit Eins, und seien  $(X, \mu_X, e_X)$  und  $(Y, \mu_Y, e_Y)$  zwei  $A$ -Kegel in der Kategorie der Mengen. Dann ist das direkte Produkt  $X \times Y$  zusammen mit der Abbildung

$$\mu_{X \times Y}: \begin{cases} A \times X \times Y & \longrightarrow & X \times Y \\ (\lambda, x, y) & \longmapsto & (\mu_X(\lambda, x), \mu_X(\lambda, y)) \end{cases}$$

als Multiplikation und  $e_{X \times Y} := (e_X, e_Y) \in X \times Y$  als Spitze ein  $A$ -Kegel.

Seien nun  $X$  und  $Y$  komplex analytische Kegel über  $S$ . Es bezeichne  $\mu_X$  und  $\mu_Y$  die Multiplikationen sowie  $e_X$  und  $e_Y$  die Spitzen von  $X$  und  $Y$ . Indem wir für alle komplexen Räume  $T$  über  $S$  die Menge  $\mathfrak{h}_{X \times_S Y}(T) \simeq \mathfrak{h}_X(T) \times \mathfrak{h}_Y(T)$  mit der oben definierten Produktstruktur versehen, erhalten wir eine  $\mathfrak{h}_{\mathbb{C} \times_S}(T)$ -Kegelstruktur auf  $\mathfrak{h}_{X \times_S Y}(T)$ , welche funktoriell ist. Der komplexe Raum  $X \times_S Y$  wird auf diese Weise zu einem komplex analytischen Kegel über  $S$ . Die Multiplikation  $\mu_{X \times_S Y}$  ist dabei gegeben durch die Komposition der Abbildungen

$$(\mathbb{C} \times S) \times_S X \times_S Y \longrightarrow (\mathbb{C} \times S) \times_S X \times_S (\mathbb{C} \times S) \times_S Y \xrightarrow{\mu_X \times \mu_Y} X \times_S Y,$$

und die Spitze  $e_{X \times_S Y}$  ist gegeben durch die Komposition der folgenden Abbildungen:

$$S \xrightarrow{\Delta_S} S \times_S S \xrightarrow{e_X \times e_Y} X \times_S Y$$

## Die Dualität von Kegeln und endlich präsentierten graduierten Algebren

Sei  $S$  ein komplexer Raum, dann nennen wir eine endlich präsentierte graduierte  $\mathcal{O}_S$ -Algebra  $\bigoplus_{m \geq 0} \mathcal{A}_m$ , für die  $\mathcal{A}_0 = \mathcal{O}_S$  gilt, eine  $\mathcal{O}_S$ -Kegelalgebra. Die  $\mathcal{O}_S$ -Kegelalgebren bilden eine Kategorie, welche wir mit  $\mathfrak{Alg}_{\mathcal{O}_S}^*$  bezeichnen. Diese Bezeichnung ist motiviert durch das Hauptresultat dieser Arbeit, welches besagt, dass die Kategorie der  $\mathcal{O}_S$ -Kegelalgebren dual zur Kategorie der komplex analytischen Kegel über  $S$  ist, und in diesem Kapitel bewiesen wird. Unsere Darstellung folgt der Originalarbeit [AM86] von AXELSSON und MAGNUSSON.

### § 10. Der Funktor $\Phi: (\mathfrak{Alg}_{\mathcal{O}_S}^*)^\circ \rightarrow \mathfrak{Cone}_S$

Wir konstruieren in diesem Paragraphen eine Kegelstruktur auf dem analytischen Spektrum einer  $\mathcal{O}_S$ -Kegelalgebra. Insbesondere zeigen wir, dass hierdurch ein Funktor von der Kategorie der  $\mathcal{O}_S$ -Kegelalgebren in die Kategorie der komplex analytischen Kegel über  $S$  definiert ist.

**10.1. Die Algebra  $\mathcal{O}_S[t]$  und der Ring  $\mathbb{C} \times S$ .** Ein Ring in der Kategorie der komplexen Räume über  $S$  ist ein komplexer Raum  $X$  über  $S$  zusammen mit einer funktoriellen Ringstruktur auf  $h_X(T)$  für alle komplexen Räume  $T$  über  $S$ . Das heißt, für alle  $T$  ist  $h_X(T)$  ein Ring, und durch Addition und Multiplikation auf  $h_X(T)$  werden zwei funktorielle Morphismen  $h_X \times h_X \rightarrow h_X$  induziert. Dies ist gleichbedeutend damit, dass  $h_X(f): h_X(T') \rightarrow h_X(T)$  für alle Morphismen  $f: T \rightarrow T'$  von komplexen Räumen über  $S$  ein Ringhomomorphismus ist.

Bezeichnet  $S$  einen komplexen Raum, dann ist  $\mathcal{O}_S[t]$  eine endlich präsentierte  $\mathcal{O}_S$ -Algebra, und  $\text{Specan}(\mathcal{O}_S[t])$  ist gegeben durch  $\mathbb{C} \times S$ . Nach Satz 3.4.1 wird der Funktor  $F_{\Gamma,1/S}$  durch  $\mathbb{C} \times S$  dargestellt. Wir haben somit einen funktoriellen Isomorphismus

$$h_{\mathbb{C} \times S} \xrightarrow{\sim} F_{\Gamma,1/S}.$$

Für alle komplexen Räume  $T$  über  $S$  induziert die Ringstruktur von  $\Gamma(T, \mathcal{O}_T)$  über diesen Isomorphismus eine funktorielle Ringstruktur auf  $h_{\mathbb{C} \times S}(T)$ . Auf diese Weise wird  $\mathbb{C} \times S$  zu einem Ring in der Kategorie der komplexen Räume über  $S$ . Die durch  $\Gamma(T, \mathcal{O}_T)$  auf  $h_{\mathbb{C} \times S}(T)$  induzierte Ringstruktur ist identisch mit der Ringstruktur, welche von  $\mathbb{C}$  durch den Basiswechsel  $\mathbb{C} \rightsquigarrow \mathbb{C} \times S$  induziert wird. Wir definieren nun:

$$\mu_{\mathcal{O}_S[t]}: \begin{cases} \mathcal{O}_S[t] & \longrightarrow & \mathcal{O}_S[t] \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S[t] \\ t & \longmapsto & t \otimes t \end{cases} \quad (10.1.a)$$

$$\alpha_{\mathcal{O}_S[t]}: \begin{cases} \mathcal{O}_S[t] & \longrightarrow & \mathcal{O}_S[t] \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S[t] \\ t & \longmapsto & t \otimes 1 + 1 \otimes t \end{cases} \quad (10.1.b)$$

Bezeichnen  $\alpha_{\mathbb{C}}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  und  $\mu_{\mathbb{C}}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  die übliche Addition und Multiplikation von  $\mathbb{C}$ , so sehen wir anhand der folgenden Rechnungen und Korollar 5.4.2, dass  $\text{Specan}(\alpha_{\mathcal{O}_S[t]}) = \alpha_{\mathbb{C}} \times_S \text{id}_S =: \alpha_{\mathbb{C} \times S}$  und  $\text{Specan}(\mu_{\mathcal{O}_S[t]}) = \mu_{\mathbb{C}} \times_S \text{id}_S =: \mu_{\mathbb{C} \times S}$  ist:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{\mathbb{C} \times S}(\mathfrak{z}) &= \tilde{\alpha}_{\mathbb{C} \times S}(\tilde{p}'_1(z)) = \tilde{p}_1 \circ \alpha_{\mathbb{C}}(z) = \tilde{p}_1(z \circ \alpha_{\mathbb{C}}) \\ &= \tilde{p}_1(z_1 + z_2) = \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2 = \xi_{\mathbb{C}^2 \times S}^b \circ \alpha_{\mathcal{O}_S[t]}(t) \\ \tilde{\mu}_{\mathbb{C} \times S}(\mathfrak{z}) &= \tilde{\mu}_{\mathbb{C} \times S}(\tilde{p}'_1(z)) = \tilde{p}_1 \circ \mu_{\mathbb{C}}(z) = \tilde{p}_1(z \circ \mu_{\mathbb{C}}) \\ &= \tilde{p}_1(z_1 \cdot z_2) = \mathfrak{z}_1 \cdot \mathfrak{z}_2 = \xi_{\mathbb{C}^2 \times S}^b \circ \mu_{\mathcal{O}_S[t]}(t) \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen  $p'_1: \mathbb{C} \times S \rightarrow \mathbb{C}$  und  $p_1: \mathbb{C}^2 \times S \rightarrow \mathbb{C}^2$  die jeweiligen Projektionen auf den ersten Faktor.

**10.2. Der assoziierte Kegel einer  $\mathcal{O}_S$ -Kegelalgebra.** Sei  $S$  ein komplexer Raum. Wir definieren für eine  $\mathcal{O}_S$ -Kegelalgebra  $\mathcal{A} = \bigoplus_{m \geq 0} \mathcal{A}_m$  Abbildungen wie folgt:

$$\mu_{\mathcal{A}}: \begin{cases} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{O}_S[t] \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A} \\ \sum a_m & \longmapsto & \sum t^m \otimes a_m \end{cases} \quad (10.2.a)$$

$$e_{\mathcal{A}}: \begin{cases} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{O}_S \\ \sum a_m & \longmapsto & a_0 \end{cases} \quad (10.2.b)$$

**SATZ 10.2.1.** *Es sei  $\mathcal{A}$  eine  $\mathcal{O}_S$ -Kegelalgebra. Dann ist  $(X, \pi_X) := \text{Specan}(\mathcal{A})$  zusammen mit  $\mu_X := \text{Specan}(\mu_{\mathcal{A}}): (\mathbb{C} \times S) \times_S X \rightarrow X$  als Multiplikation und  $e_X := \text{Specan}(e_{\mathcal{A}}): S \rightarrow X$  als Spitze ein komplex analytischer Kegel über  $S$ .*

*Beweis.* Es ist die Kommutativität der Diagramme (9.1.a)-(9.1.c) zu zeigen. Das folgende Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_S[t] \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S[t] \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A} & \xleftarrow{\mu_{\mathcal{O}_S[t]} \otimes \text{id}_{\mathcal{A}}} & \mathcal{O}_S[t] \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A} \\ \text{id}_{\mathcal{O}_S[t]} \otimes \mu_{\mathcal{A}} \uparrow & & \uparrow \mu_{\mathcal{A}} \\ \mathcal{O}_S[t] \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A} & \xleftarrow{\mu_{\mathcal{A}}} & \mathcal{A} \end{array}$$

Wenden wir den Funktor  $\text{Specan}$  auf das obige Diagramm an, so erhalten wir mit Satz 6.1.1 das folgende kommutative Diagramm und damit die Kommutativität von Diagramm (9.1.a). Entsprechend folgt aus der Kommutativität der beiden Diagramme (vgl. § 7)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A} & \xleftarrow{1_{\mathcal{O}_S[t]} \otimes \text{id}_{\mathcal{A}}} & \mathcal{O}_S[t] \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A} \\ \Delta_{\mathcal{A}} \downarrow & & \uparrow \mu_{\mathcal{A}} \\ \mathcal{A} & \xleftarrow{\text{id}_{\mathcal{A}}} & \mathcal{A} \\ \\ \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A} & \xleftarrow{0_{\mathcal{O}_S[t]} \otimes \text{id}_{\mathcal{A}}} & \mathcal{O}_S[t] \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A} \\ \Delta_{\mathcal{A}} \downarrow & & \uparrow \mu_{\mathcal{A}} \\ \mathcal{A} & \xleftarrow{\pi_{\mathcal{A}}} \mathcal{O}_S \xleftarrow{e_{\mathcal{A}}} & \mathcal{A} \end{array}$$

die Kommutativität der Diagramme (9.1.b) und (9.1.c). Das bedeutet,  $X$  ist ein komplex analytischer Kegel über  $S$  mit Multiplikation  $\mu_X$  und Spitze  $e_X$ .  $\square$

SATZ 10.2.2. *Es sei  $\psi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  ein Morphismus von  $\mathcal{O}_S$ -Kegelalgebren. Dann ist  $\text{Specan}(\psi): \text{Specan}(\mathcal{B}) \rightarrow \text{Specan}(\mathcal{A})$  ein Morphismus von komplex analytischen Kegeln über  $S$ .*

*Beweis.* Seien  $\mu_{\mathcal{A}}$  und  $\mu_{\mathcal{B}}$  definiert wie oben. Dann ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_S[t] \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A} & \xleftarrow{\mu_{\mathcal{A}}} & \mathcal{A} \\ \text{id}_{\mathcal{O}_S[t]} \otimes \psi \uparrow & & \uparrow \psi \\ \mathcal{O}_S[t] \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{B} & \xleftarrow{\mu_{\mathcal{B}}} & \mathcal{B} \end{array}$$

Durch Anwenden des Funktors  $\text{Specan}$  auf das obige Diagramm folgt die Kommutativität von:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C} \times S) \times_S Y & \xrightarrow{\mu_Y} & Y \\ \text{id}_{\mathbb{C} \times S} \times \text{Specan}(\psi) \downarrow & & \downarrow \text{Specan}(\psi) \\ (\mathbb{C} \times S) \times_S X & \xrightarrow{\mu_X} & X \end{array}$$

Nach Satz 9.4.1 ist  $\text{Specan}(\psi)$  somit ein Kegelmorphismus. □

Die Sätze 10.2.1 und 10.2.2 zeigen, dass das analytische Spektrum einen Funktor  $\Phi: \mathcal{A} \rightsquigarrow \text{Specan}(\mathcal{A})$  von der Kategorie der  $\mathcal{O}_S$ -Kegelalgebren in die Kategorie der komplex analytischen Kegel über  $S$  induziert.

**10.3. Der assoziierte Kegel eines Produktes von  $\mathcal{O}_S$ -Kegelalgebren.** Seien  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  zwei  $\mathcal{O}_S$ -Kegelalgebren. Dann ist  $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{B}$  eine  $\mathcal{O}_S$ -Kegelalgebra, wobei für die homogenen Elemente vom Grad  $m$  gilt:

$$(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{B})_m = \bigoplus_{i=0}^m \mathcal{A}_i \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{B}_{m-i}$$

Es bezeichne nun  $\mu_{\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{B}}$  die Abbildung, welche durch die Komposition

$$\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{B} \xrightarrow{\mu_{\mathcal{A}} \otimes \mu_{\mathcal{B}}} \mathcal{O}_S[t] \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S[t] \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{B} \xrightarrow{\Delta'} \mathcal{O}_S[t] \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{B}$$

gegeben ist, wobei  $\Delta'$  die Abbildung  $t \otimes a \otimes t \otimes b \mapsto t^2 \otimes a \otimes b$  bezeichnet. Dann gilt für  $U \subset S$  offen und  $a_m \otimes b_n \in \mathcal{A}_m(U) \otimes_{\mathcal{O}_S(U)} \mathcal{B}_n(U)$ :

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{B}}(a_m \otimes b_n) &= \Delta' \circ \mu_{\mathcal{A}} \otimes \mu_{\mathcal{B}}(a_m \otimes b_n) \\ &= \Delta'(t^m \otimes a \otimes t^n \otimes b) = t^{m+n} \otimes a \otimes b \end{aligned}$$

Die Abbildung  $\mu_{\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{B}}$  entspricht somit der oben definierten Abbildung (10.2.a). Bezeichnen wir die analytischen Spektren von  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  mit  $X$  und  $Y$ , so gilt  $\text{Specan}(\mu_{\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{B}}) = \mu_{X \times_S Y}$  (vgl. Abschnitt 9.5). Als Konsequenz ergibt sich nun:

SATZ 10.3.1. *Es seien  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  zwei  $\mathcal{O}_S$ -Kegelalgebren. Dann ist der natürliche Isomorphismus*

$$\text{Specan}(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \text{Specan}(\mathcal{A}) \times_S \text{Specan}(\mathcal{B})$$

*ein Morphismus von komplex analytischen Kegeln über  $S$ .*

**10.4. Die Abbildung  $\mu_{\mathcal{A}}^\lambda$ .** Es sei  $\mathcal{A} = \bigoplus_{m \geq 0} \mathcal{A}_m$  eine  $\mathcal{O}_S$ -Kegelalgebra. Wir definieren für  $\lambda \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ :

$$\mu_{\mathcal{A}}^\lambda: \begin{cases} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ \sum a_m & \longmapsto & \sum \lambda^m a_m \end{cases} \quad (10.4.a)$$

Dann ist  $\text{Specan}(\mu_{\mathcal{A}}^\lambda) = \mu_X^\lambda$ , denn  $\mu_{\mathcal{A}}^\lambda$  ist nichts anderes als die folgende Komposition:

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\mu_{\mathcal{A}}} \mathcal{O}_S[t] \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A} \xrightarrow{\lambda_{\mathcal{A}} \otimes \text{id}} \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A} \xrightarrow{\Delta_{\mathcal{A}}} \mathcal{A}$$

### § 11. Der Funktor $\Psi: (\mathcal{E}^{\text{h}^{\text{a}}\text{u}}/\mathcal{S})^\circ \rightarrow \mathcal{A}lgr_{\mathcal{O}_S}^*$

Ziel dieses Paragraphen ist die Konstruktion eines Funktors von der Kategorie der komplex analytischen Kegel über  $S$  in die Kategorie der  $\mathcal{O}_S$ -Kegelalgebren.

**11.1. Die Garbe der homogenen Schnitte.** Es sei  $(X, \pi_X)$  ein komplex analytischer Kegel über  $S$  mit Multiplikation  $\mu_X$ . Bezeichnen  $p_1: (\mathbb{C} \times S) \times_S X \rightarrow \mathbb{C} \times S$  und  $p_2: (\mathbb{C} \times S) \times_S X \rightarrow X$  die Projektionen auf den entsprechenden Faktor und setzen wir  $\mathfrak{T} := \tilde{p}_1(\mathfrak{z}) \in \mathcal{O}_{(\mathbb{C} \times S) \times_S X}((\mathbb{C} \times S) \times_S X)$ , dann ist für alle  $m \geq 0$  und  $U \subset S$  offen, durch

$$\mathcal{A}_m^X(U) := \left\{ f \in \mathcal{O}_X(\pi_X^{-1}(U)) : \tilde{\mu}_{X, \pi_X^{-1}(U)}(f) = \tilde{p}_{2, \pi_X^{-1}(U)}(f) \cdot \mathfrak{T}^m \right\} \quad (11.1.a)$$

ein  $\mathcal{O}_S$ -Modul  $\mathcal{A}_m^X$  definiert. Die Schnitte von  $\mathcal{A}_m^X$  über  $U$  sind genau die Schnitte von  $\mathcal{O}_X$  über  $\pi_X^{-1}(U)$ , welche bezüglich der Multiplikation  $\mu_X$  homogen vom Grad  $m$  sind. Es gilt  $\mathcal{A}_m \cdot \mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{m+n}$  und somit ist durch  $\mathcal{A}^X := \bigoplus_{m \geq 0} \mathcal{A}_m^X$  eine graduierte  $\mathcal{O}_S$ -Unteralgebra von  $\pi_*^X \mathcal{O}_X$  definiert.

**11.2. Die  $\mathcal{O}_S$ -Algebra  $\mathcal{B}^X$ .** Sei  $(X, \pi_X)$  ein komplex analytischer Kegel über  $S$  mit Multiplikation  $\mu_X$ . Wir definieren durch

$$\varrho_{X,U}: \begin{cases} \mathcal{O}_X(\pi_X^{-1}(U)) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X|S}(U) \\ f & \longmapsto & f|_U \end{cases}$$

für  $U \subset S$  offen einen  $\mathcal{O}_S$ -Algebromorphismus  $\varrho_X: \pi_*^X \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_{X|S}$ . Für  $s \in S$  ist dann  $\varrho_{X,s}: (\pi_*^X \mathcal{O}_X)_s \rightarrow \mathcal{O}_{X,s}$  der induktive Limes  $\varinjlim_{U \ni s} \mathcal{O}_X(\pi_X^{-1}(U)) \rightarrow \mathcal{O}_{X,s}$  der Keim-Abbildungen. Wir setzen nun:

$$\mathcal{B}^X := \varrho_X(\mathcal{A}^X) = \bigoplus_{m \geq 0} \varrho_X(\mathcal{A}_m^X) := \bigoplus_{m \geq 0} \mathcal{B}_m^X \quad (11.2.a)$$

Dann ist  $\mathcal{B}^X$  eine graduierte  $\mathcal{O}_S$ -Unteralgebra von  $\mathcal{O}_{X|S}$  und es gilt:

**SATZ 11.2.1.** *Es sei  $(X, \pi_X)$  ein komplex analytischer Kegel über  $S$ . Dann induziert  $\varrho_X: \pi_*^X \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_{X|S}$  einen Isomorphismus  $\tilde{\varrho}_X: \mathcal{A}^X \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}^X$  von graduierten  $\mathcal{O}_S$ -Algebren, so dass das folgende Diagramm kommutativ ist:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^X & \xrightarrow{\text{kan.}} & \pi_*^X \mathcal{O}_X \\ \tilde{\varrho}_X \downarrow \wr & & \downarrow \varrho_X \\ \mathcal{B}^X & \xrightarrow{\text{kan.}} & \mathcal{O}_{X|S} \end{array} \quad (11.2.b)$$

*Beweis.* Es bezeichne  $\mu_X$  die Multiplikation von  $X$ . Da  $\varrho_X$  ein graduerter  $\mathcal{O}_S$ -Algebromorphismus ist, reicht es zu zeigen, dass  $\varrho_X$  für alle  $m \geq 0$  einen  $\mathcal{O}_S$ -Modulisomorphismus  $\mathcal{A}_m^X \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}_m^X$  induziert. Sei  $U \subset S$  eine offene Umgebung und  $b \in \mathcal{B}_m^X(U)$ . Nach Konstruktion existiert dann ein  $f \in \mathcal{A}_m^X(U)$ , so dass  $f|_U = b$  ist. Nehmen wir nun an, dass es ein  $g \in \mathcal{A}_m^X(U)$  gibt mit  $g \neq f$  und  $g|_U = b$ . Dann existiert eine offene Umgebung  $V \subset \pi_X^{-1}(U)$  von  $U$ , so dass  $f|_V = g|_V$  ist. Da  $f \neq g$  ist, existiert ein  $x \in \pi_X^{-1}(U)$  mit  $f_x \neq g_x$ . Aufgrund der Stetigkeit von  $|\mu_X|$  gibt es ein  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ , so dass  $y := \mu_X^\lambda(x) \in V$  ist, und es gilt:

$$\begin{aligned} f_x &= \tilde{\mu}_{X,x}^\lambda \circ \tilde{\mu}_{X,y}^{\lambda^{-1}}(f_x) = \tilde{\mu}_{X,x}^\lambda(\lambda^{-m} f_y) = \tilde{\mu}_{X,x}^\lambda(\lambda^{-m} b) \\ &= \tilde{\mu}_{X,x}^\lambda(\lambda^{-m} g_y) = \tilde{\mu}_{X,x}^\lambda \circ \tilde{\mu}_{X,y}^{\lambda^{-1}}(g_x) = g_x \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme  $f \neq g$ . Jedes  $b \in \mathcal{B}_m^X(U)$  lässt sich somit auf nur eine Weise zu einem  $f \in \mathcal{A}_m^X(U)$  mit  $\varrho_X(f) = f|_U = b$  fortsetzen.  $\square$

**SATZ 11.2.2.** *Es sei  $(X, \pi_X)$  ein komplex analytischer Kegel über  $S$  mit Multiplikation  $\mu_X: \mathbb{C} \times X \rightarrow X$  und Spitze  $e_X: S \rightarrow X$ . Ist  $s \in S$ ,  $a \in \mathcal{O}_{X,s}$  und  $\sum_{m=0}^{\infty} a_m T^m$  die eindeutige Potenzreihendarstellung von  $\tilde{\mu}_{X,(0,s)}(a) \in \mathcal{O}_{\mathbb{C} \times X, (0,s)}$  mit Koeffizienten  $a_m \in \mathcal{O}_{X,s}$ , dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (1) *Es ist  $a_0 = \overline{(e_X \circ \pi_X)}_s(a) \in \mathcal{O}_{S,s}$ , und für  $m \geq 0$  ist  $a_m \in \mathcal{B}_{m,s}^X$ .*
- (2) *In der Folgentopologie von  $\mathcal{O}_{X,s}$  ist  $a = \sum_{m=0}^{\infty} a_m$  und diese Darstellung von  $a$  als Reihe mit  $a_m \in \mathcal{B}_{m,s}^X$  ist eindeutig.*
- (3) *Es ist  $\mathcal{B}_0^X = \mathcal{O}_S$  und  $\mathcal{B}_+^X = \bigoplus_{m \geq 1} \mathcal{B}_m^X \subset \mathcal{I}_S$ , wobei  $\mathcal{I}$  das Nullstellenideal von  $S$  bezeichnet.*

*Beweis.* (1) Das Einsetzen von  $a$  in das erste Kegelaxiom (9.1.d) an der Stelle  $(0, 0, s)$  ergibt auf der linken Seite:

$$\begin{aligned} \overline{(\mu_X \circ (\mu_{\mathbb{C}} \times \text{id}_X))}_{(0,0,s)}(a) &= \overline{(\mu_{\mathbb{C}} \times \text{id}_X)}_{(0,0,s)} \circ \tilde{\mu}_{X,(0,s)}(a) \\ &= \overline{(\mu_{\mathbb{C}} \times \text{id}_X)}_{(0,0,s)} \left( \sum_{m=0}^{\infty} a_m T^m \right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \overline{(\mu_{\mathbb{C}} \times \text{id}_X)}_{(0,0,s)}((1 \hat{\otimes} a_m) \cdot (z^m \hat{\otimes} 1)) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} ((1 \hat{\otimes} 1) \hat{\otimes} a_m) \cdot ((z \hat{\otimes} z)^m \hat{\otimes} 1) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \hat{\otimes} z^m \hat{\otimes} a_m \end{aligned}$$

Die rechte Seite ergibt:

$$\begin{aligned} \overline{(\mu_X \circ (\text{id}_{\mathbb{C}} \times \mu_X))}_{(0,0,s)}(a) &= \overline{(\text{id}_{\mathbb{C}} \times \mu_X)}_{(0,0,s)} \circ \tilde{\mu}_{X,(0,s)}(a) \\ &= \overline{(\text{id}_{\mathbb{C}} \times \mu_X)}_{(0,0,s)} \left( \sum_{m=0}^{\infty} a_m T^m \right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \overline{(\text{id}_{\mathbb{C}} \times \mu_X)}_{(0,0,s)}((1 \hat{\otimes} a_m) \cdot (z^m \hat{\otimes} 1)) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (1 \hat{\otimes} \tilde{\mu}_{X,(0,s)}(a_m)) \cdot (z^m \hat{\otimes} (1 \hat{\otimes} 1)) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \hat{\otimes} \tilde{\mu}_{X,(0,s)}(a_m) \end{aligned}$$

Ein Vergleich der Koeffizienten ergibt:  $\tilde{\mu}_{X,(0,s)}(a_m) = z^m \hat{\otimes} a_m = a_m T^m$ .

Für die zweite Aussage betrachten wir das dritte Kegelixiom (9.1.f). Das Einsetzen von  $a$  an der Stelle  $s$  ergibt dann für die linke Seite:

$$\begin{aligned}
\overline{(\mu_X \circ (0_X \times \text{id}_X) \circ \Delta_X)_s}(a) &= \tilde{\Delta}_{X,s} \circ \overline{(0_X \times \text{id}_X)_{(s,s)}} \circ \tilde{\mu}_{X,(0,s)}(a) \\
&= \tilde{\Delta}_{X,s} \circ \overline{(0_X \times \text{id}_X)_{(s,s)}} \left( \sum_{m=0}^{\infty} a_m T^m \right) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\Delta}_{X,s} \circ \overline{(0_X \times \text{id}_X)_{(s,s)}} ((1 \hat{\otimes} a_m) \cdot (z^m \hat{\otimes} 1)) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\Delta}_{X,s} ((1 \hat{\otimes} a_m) \cdot (0^m \hat{\otimes} 1)) = \tilde{\Delta}_{X,s}(1 \hat{\otimes} a_0) = a_0
\end{aligned}$$

Also ist  $a_0 = \overline{(e_X \circ \pi_X)_s}(a) = \tilde{\pi}_{X,s} \circ \tilde{e}_{X,s}(a) = \tilde{e}_{X,s}(a) \cdot 1$  und somit  $a_0 \in \mathcal{O}_{S,s}$ .

(2) Sei  $U$  eine offene Umgebung von  $s$  in  $X$ . Dann ist  $\mu_X^{-1}(U)$  eine offene Umgebung von  $\mathbb{C} \times \{s\}$  in  $\mathbb{C} \times X$  und enthält somit eine offene Umgebung  $D \times V$  von  $(0, s)$ , bestehend aus einer offenen Kreisscheibe  $D$  mit Radius  $> 1$  und einer offenen Umgebung  $V$  von  $s$  in  $X$ . Indem wir  $V$  gegebenenfalls verkleinern, können wir annehmen, dass die Einschränkung von  $X$  auf  $V$  isomorph zu einem lokalen Modell ist, von welchem wir nach einer gegebenenfalls weiteren Verkleinerung zusätzlich annehmen können, dass es als abgeschlossener komplexer Unterraum eines offenen Polyzylinders  $P \subset \mathbb{C}^N$  realisiert werden kann. Wir erhalten somit eine abgeschlossene Einbettung

$$(V, \mathcal{O}_{X|V}) \xleftarrow{j} (P, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^N|P})$$

von  $V$  in einen offenen Polyzylinder  $P$ . Das direkte Produkt zweier abgeschlossener Einbettungen ist wieder eine abgeschlossene Einbettung [CAS, I.3.4, S. 27], und somit definiert

$$(D \times V, \mathcal{O}_{\mathbb{C} \times X|D \times V}) \xleftarrow{\text{id}_D \times j} (D \times P, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{1+N}|D \times P})$$

eine abgeschlossene Einbettung von  $D \times V$  in den offenen Polyzylinder  $D \times P$ . Als Polyzylinder ist  $D \times P$  insbesondere Steinsch und daher ist

$$\widetilde{\text{id}_D \times j}: \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{1+N}|D \times P}(D \times P) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C} \times X|D \times V}(D \times V)$$

surjektiv. Sei nun  $\alpha \in \mathcal{O}_X(U)$  ein Schnitt über  $U$ , welcher  $a$  repräsentiert. Nach Konstruktion ist  $D \times V \subset \mu_X^{-1}(U)$ , und daher können wir  $\tilde{\mu}_{X,U}(\alpha)$  auf  $D \times V$  einschränken. Es existiert also ein  $\beta \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{1+N}}(D \times P)$  mit:

$$\tilde{\mu}_{X,U}(\alpha)|_{D \times V} = \widetilde{(\text{id}_D \times j)}(\beta)$$

Da  $D \times P$  ein Polyzylinder ist, konvergiert die Taylorentwicklung von  $\beta$  auf ganz  $D \times P$  gegen  $\beta$  [HFCM, I, Theorem 4.2, S. 18]. Nach Umsortieren erhalten wir eine Potenzreihenentwicklung von  $\beta$

$$\beta = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m T^m$$

mit Koeffizienten  $\beta_m \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^N}(P)$ . Bezeichnet  $b_m := (\beta_m)_{j(s)}$  den Keim von  $\beta_m$  an der Stelle  $j(s)$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} a_m T^m &= \widetilde{\mu}_{(0,s)}(a) = \widetilde{(\text{id}_D \times j)_{(0,s)}}(\beta_{(0,j(s))}) \\ &= \widetilde{(\text{id}_D \times j)_{(0,s)}}\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m T^m\right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \widetilde{(\text{id}_D \times j)_{(0,s)}}\left((1 \hat{\otimes} b_m) \cdot (z^m \hat{\otimes} 1)\right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (1 \hat{\otimes} \tilde{j}_s(b_m)) \cdot (z^m \hat{\otimes} 1) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{j}_s(b_m) T^m \end{aligned}$$

Ein Vergleich der Koeffizienten ergibt  $\tilde{j}_s(b_m) = a_m$ . Aus dem zweiten Kegelaxiom (9.1.e) ergibt sich nun:

$$\begin{aligned} a &= \widetilde{(\mu_X \circ (1_X \times \text{id}_X) \circ \Delta_X)_s}(a) = \tilde{\Delta}_{X,s} \circ \widetilde{(1_X \times \text{id}_X)_{(s,s)}} \circ \tilde{\mu}_{X,(1,s)}(a) \\ &= \tilde{\Delta}_{X,s} \circ \widetilde{(1_X \times \text{id}_X)_{(s,s)}} \circ \widetilde{(\text{id}_D \times j)_{(1,s)}}(\beta_{(1,j(s))}) \\ &= \tilde{\Delta}_{X,s} \circ \widetilde{((\text{id}_D \times j) \circ (1_X \times \text{id}_X))_{(s,s)}}\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m T^m\right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\Delta}_{X,s} \circ \widetilde{(1_X \times j)_{(s,s)}}\left((1 \hat{\otimes} b_m) \cdot (z^m \hat{\otimes} 1)\right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\Delta}_{X,s}(\tilde{j}_s(b_m) \hat{\otimes} 1^m) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{j}_s(b_m) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \end{aligned}$$

(3) Ergibt sich unter Berücksichtigung von (9.3.b) als unmittelbare Folgerung aus (1).  $\square$

LEMMA 11.2.3. *Es sei  $X$  ein komplex analytischer Kegel über  $S$ . Ist  $s \in S$  und  $I$  ein Ideal aus  $\mathcal{O}_{X,s}$  mit  $I \supset \mathcal{B}_{+,s}^X$ , welches von endlich vielen Elementen aus  $\mathcal{B}_{+,s}^X$  erzeugt wird, dann erzeugen diese Elemente  $\mathcal{B}_{+,s}^X$  als  $\mathcal{B}_s^X$ -Ideal.*

*Beweis.* Bezeichne  $\mu_X: \mathbb{C} \times X \rightarrow X$  die Multiplikation des Kegels und sei  $f = \sum_{j=1}^r f_j$  ein Element aus  $\mathcal{B}_{+,s}^X$ . Durch Anwenden von  $\tilde{\mu}_{X,(0,s)}$  erhalten wir dann:

$$\tilde{\mu}_{X,(0,s)}(f) = \tilde{\mu}_{X,(0,s)}\left(\sum_{j=1}^r f_j\right) = \sum_{j=1}^r \tilde{\mu}_{X,(0,s)}(f_j) = \sum_{j=1}^r f_j T^j$$

Nach Voraussetzung ist  $f \in I$ . Bezeichnen  $b_1, \dots, b_n \in \mathcal{B}_{+,s}^X$  die Erzeuger von  $I$ , von welchen wir annehmen können, dass sie homogen sind, dann gibt es also  $\beta_i \in \mathcal{O}_{X,s}$ , so

dass  $f = \sum_{i=1}^n \beta_i b_i$  ist. Eine erneute Anwendung von  $\tilde{\mu}_{X,(0,s)}$  ergibt:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{X,(0,s)}(f) &= \tilde{\mu}_{X,(0,s)}\left(\sum_{i=1}^n \beta_i b_i\right) = \sum_{i=1}^n \tilde{\mu}_{X,(0,s)}(\beta_i b_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \tilde{\mu}_{X,(0,s)}(\beta_i) \cdot \tilde{\mu}_{X,(0,s)}(b_i) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=0}^{\infty} \beta_{i,j} T^j\right) b_i T^{\deg b_i} \end{aligned}$$

Gleichsetzen der beiden Ausdrücke ergibt:

$$\sum_{j=1}^r f_j T^j = \tilde{\mu}_{X,(0,s)}(f) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{\infty} \beta_{i,j} b_i T^{j+\deg b_i}$$

Durch Vergleich der Koeffizienten erhalten wir somit  $f_j = \sum_{i=1}^n \beta_{i,j-\deg b_i} b_i$ , wobei wir  $\beta_{i,j-\deg b_i} = 0$  setzen, wenn  $j - \deg b_i < 0$  ist. Daher folgt nun:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{j=1}^r f_j = \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^n \beta_{i,j-\deg b_i} b_i \\ &= \sum_{i=1}^n b_i \underbrace{\left(\sum_{j=1}^r \beta_{i,j-\deg b_i}\right)}_{\in \mathcal{B}_s^X} \in \sum_{i=1}^n b_i \mathcal{B}_s^X \quad \square \end{aligned}$$

**KOROLLAR 11.2.4.** *Es sei  $X$  ein komplex analytischer Kegel über  $S$ . Dann ist  $\mathcal{B}_s^X$  für alle  $s \in S$  eine endlich erzeugte  $\mathcal{O}_{S,s}$ -Algebra.*

*Beweis.* Sei  $I$  das von  $\mathcal{B}_{+,s}^X$  in  $\mathcal{O}_{X,s}$  erzeugte Ideal. Da  $\mathcal{O}_{X,s}$  noethersch ist, wird  $I$  von endlich vielen Elementen aus  $\mathcal{B}_{+,s}^X$  erzeugt. Nach Lemma 11.2.3 erzeugen diese das Ideal  $\mathcal{B}_{+,s}^X$ . Dies ist gleichbedeutend damit, dass  $\mathcal{B}_s^X$  eine endlich erzeugte  $\mathcal{O}_{S,s}$ -Algebra ist [BAC, III, § 1.2, Proposition 1, S. 156].  $\square$

**SATZ 11.2.5.** *Es sei  $X$  ein komplex analytischer Kegel über  $S$ . Ist  $s \in S$  und bezeichnet  $\mathcal{I}$  das Nullstellenideal von  $S$ , dann wird  $\mathcal{B}_s^X$  genau dann als  $\mathcal{O}_{S,s}$ -Algebra von endlich vielen Elementen aus  $\mathcal{B}_{+,s}^X$  erzeugt, wenn diese  $\mathcal{I}_s$  als  $\mathcal{O}_{X,s}$ -Ideal erzeugen.*

*Beweis.* ( $\Rightarrow$ ) Seien  $b_1, \dots, b_n$  die Erzeuger von  $\mathcal{B}_s^X$  als  $\mathcal{O}_{S,s}$ -Algebra. Diese erzeugen  $\mathcal{B}_{+,s}^X$  als Ideal in  $\mathcal{B}_s^X$ . Es reicht somit zu zeigen, dass  $\mathcal{I}_s$  von endlich vielen Elementen aus  $\mathcal{B}_{+,s}^X$  erzeugt wird. Da  $\mathcal{O}_{X,s}$  noethersch ist, gibt es endlich viele Elemente  $x_1, \dots, x_r$ , welche  $\mathcal{I}_s$  als Ideal in  $\mathcal{O}_{X,s}$  erzeugen. Nach (2) von Satz 11.2.2 können wir  $x_i$  als Reihe

$$x_i = \sum_{m=1}^{\infty} x_{i,m}$$

mit  $x_{i,m} \in \mathcal{B}_{m,s}^X$  darstellen. Wir setzen  $r := \max_{i=1, \dots, n} \deg b_i$ . Sei weiter  $y_i := \sum_{m=1}^r x_{i,m}$  und bezeichne  $I$  das von  $y_1, \dots, y_n$  erzeugte Ideal in  $\mathcal{O}_{X,s}$ . Für  $m > r$  haben wir  $\mathcal{B}_{m,s}^X \subset (\mathcal{B}_{+,s}^X)^2 \subset \mathcal{I}_s^2$  und insbesondere also  $x_{i,m} \in \mathcal{I}_s^2$ . Da  $\mathcal{I}_s^2$  abgeschlossen in der Folgentopologie von  $\mathcal{O}_{X,s}$  ist [AS, II.1.2, Korollar zu Satz 6, S. 85], ist  $\sum_{m=r+1}^{\infty} x_{i,m} \in \mathcal{I}_s^2$ . Folglich haben wir  $I + \mathcal{I}_s^2 = \mathcal{I}_s$ , und mit NAKAYAMA's Lemma folgt  $I = \mathcal{I}_s$ .

( $\Leftarrow$ ) Seien umgekehrt  $b_1, \dots, b_n$  Erzeuger von  $\mathcal{I}_s$  als  $\mathcal{O}_{X,s}$ -Ideal. Da  $\mathcal{I}_s \supset \mathcal{B}_{+,s}^X$  ist, folgt die Aussage aus Lemma 11.2.3.  $\square$

SATZ 11.2.6. *Es sei  $X$  ein komplex analytischer Kegel über  $S$ . Dann gibt es für alle  $s \in S$  eine offene Umgebung  $U$  von  $s$  in  $S$  und endlich viele homogene Schnitte  $\beta_1, \dots, \beta_n$  aus  $\mathcal{B}_+^X(U)$ , so dass die folgenden Aussagen gelten:*

- (1) *Bezeichnet  $\mathcal{I}$  das Nullstellenideal von  $S$ , dann wird  $\mathcal{I}_t$  für jedes  $t \in U$  von  $\beta_1, \dots, \beta_n$  als  $\mathcal{O}_{X,t}$ -Ideal erzeugt.*
- (2) *Für jedes  $t \in U$  wird  $\mathcal{B}_t^X$  als  $\mathcal{O}_{S,t}$ -Algebra von  $\beta_1, \dots, \beta_n$  erzeugt.*

*Beweis.* (1) Nach Korollar 11.2.4 gibt es endlich viele homogene Elemente  $b_1, \dots, b_n \in \mathcal{B}_{+,s}^X$ , die  $\mathcal{B}_s^X$  als  $\mathcal{O}_{X,s}$ -Algebra erzeugen. Gemäß Satz 11.2.5 erzeugen diese  $\mathcal{I}_s$  als Ideal in  $\mathcal{O}_{X,s}$ . Seien nun  $\beta_i \in \mathcal{B}_+^X(U)$  Repräsentanten der  $b_i$  auf einer offenen Umgebung  $U$  von  $s$ . Da  $\mathcal{I}_S$  ein  $\mathcal{O}_{X|S}$ -kohärentes Ideal ist, gibt es eine offene Umgebung  $V \subset U$  von  $s$ , so dass  $\mathcal{I}_t$  als Ideal in  $\mathcal{O}_{X,t}$  für alle  $t \in V$  durch  $\beta_1, \dots, \beta_n$  erzeugt wird [HFSV, 41.2, S. 137].

(2) Folgt aus (1) zusammen mit Satz 11.2.5. □

SATZ 11.2.7. *Es sei  $(X, \pi_X)$  ein komplex analytischer Kegel über  $S$ . Dann ist  $\mathcal{B}^X$  eine endlich präsentierte  $\mathcal{O}_S$ -Algebra.*

*Beweis.* Sei  $s \in S$ . Dann gibt es nach Satz 11.2.6 eine offene Umgebung  $U$  von  $s$  in  $S$  und homogene Schnitte  $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathcal{B}_+^X(U)$ , so dass  $\mathcal{B}_t^X$  für alle  $t \in U$  von  $\beta_1, \dots, \beta_n$  als  $\mathcal{O}_{S,t}$ -Algebra erzeugt wird. Wir setzen:

$$\varphi: \begin{cases} \mathcal{O}_U[t_1, \dots, t_n] & \longrightarrow & \mathcal{B}_U^X \\ t_i & \longmapsto & \beta_i \end{cases}$$

Indem wir  $\deg t_i = \deg \beta_i$  setzen, definieren wir eine Graduierung auf  $\mathcal{O}_U[t_1, \dots, t_n]$ . Hierdurch wird  $\varphi$  zu einem Morphismus von graduierten  $\mathcal{O}_U$ -Algebren und der Kern von  $\varphi$  zu einem graduierten Ideal  $\mathcal{K} := \bigoplus_{m \geq 0} \mathcal{K}_m$ . Wir haben also die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{O}_U[t_1, \dots, t_n] \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B}_U^X \longrightarrow 0$$

und es ist zu zeigen, dass  $\mathcal{K}$  in einer Umgebung von  $s$  ein endlich erzeugtes  $\mathcal{O}_U[t_1, \dots, t_n]$ -Ideal ist.

Die Schnitte  $\beta_i \in \mathcal{B}_+^X(U)$  lassen sich nach Lemma 11.2.1 eindeutig zu Schnitten  $\alpha_i \in \mathcal{A}_+^X(U) \subset \mathcal{O}_X(\pi_X^{-1}(U))$  mit  $\alpha_i|_U = \beta_i$  fortsetzen. Über die kanonische Bijektion

$$\text{Hom}_S(\pi_X^{-1}(U), U \times \mathbb{C}^n) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\pi_X^{-1}(U), \mathcal{O}_X)^n$$

erhalten wir eine durch die  $\alpha_i$  induzierte holomorphe Abbildung

$$(f, \tilde{f}): \pi_X^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{C}^n,$$

so dass die Restriktion von  $\tilde{f}_s: \mathcal{O}_{U \times \mathbb{C}^n, (s,0)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,s}$  auf

$$\mathcal{O}_{U,s}[t_1, \dots, t_n] \subset \mathcal{O}_{U,s}\{t_1, \dots, t_n\} \simeq \mathcal{O}_{U \times \mathbb{C}^n, (s,0)}$$

gerade  $\varphi_s$  ist. Folglich haben wir  $\mathcal{B}_s^X \subset \text{im } \tilde{f}_s$ , und da  $\mathcal{B}_s^X$  nach (2) von Satz 11.2.2 dicht in  $\mathcal{O}_{X,s}$  ist, liegt das Bild von  $\tilde{f}_s$  ebenfalls dicht in  $\mathcal{O}_{X,s}$ . Aus dem Epimorphiekriterium [AS, II.3.2, Satz 1, S. 101] ergibt sich somit, dass  $\tilde{f}_s$  surjektiv und daher eine Immersion in  $s$  ist. Nachdem wir  $U$  gegebenenfalls verkleinert haben, können wir also annehmen, dass es eine offene Umgebung  $V$  von  $U$  in  $\pi_X^{-1}(U)$  und eine offene Umgebung  $W$  von  $U \times \{0\}$  in  $U \times \mathbb{C}^n$  gibt, so dass  $f|_V: V \rightarrow W$  eine abgeschlossene Einbettung definiert.

Dann ist  $\mathcal{I} := \ker \tilde{f}|_V$  ein kohärentes  $\mathcal{O}_W$ -Ideal, und wir haben die folgende exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow f|_V^{-1} \mathcal{I} \longrightarrow f|_V^{-1} \mathcal{O}_W \xrightarrow{\hat{f}|_V} \mathcal{O}_V = \mathcal{O}_{X|V} \longrightarrow 0$$

Bezeichnet  $j: U \hookrightarrow V$  die kanonische Inklusion, so ergibt die Restriktion auf  $U$  die exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow \underbrace{j^{-1} f|_V^{-1} \mathcal{I}}_{=\mathcal{I}|_{U \times \{0\}}} \longrightarrow \underbrace{j^{-1} f|_V^{-1} \mathcal{O}_W}_{=\mathcal{O}_{U \times \mathbb{C}^n | U \times \{0\}}} \xrightarrow{\underbrace{j^{-1} \hat{f}|_V}_{=\hat{f}|_U}} \underbrace{j^{-1} \mathcal{O}_V}_{=\mathcal{O}_{X|U}} \longrightarrow 0$$

Insbesondere ist  $\mathcal{I}|_{U \times \{0\}}$  ein  $\mathcal{O}_{U \times \mathbb{C}^n | U \times \{0\}}$ -kohärentes Ideal und wir erhalten das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{K} & \longrightarrow & \mathcal{O}_U[t_1, \dots, t_n] & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{B}_U^X & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{I}|_{U \times \{0\}} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{U \times \mathbb{C}^n | U \times \{0\}} & \xrightarrow{\hat{f}|_U} & \mathcal{O}_{X|U} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Wir zeigen nun, dass  $\mathcal{I}_t$  für alle  $t \in U$  von  $\mathcal{K}_t$  erzeugt wird. Sei dazu  $K$  das von  $\mathcal{K}_t$  in  $\mathcal{O}_{U \times \mathbb{C}^n, (t, 0)}$  erzeugte Ideal. Da  $\mathcal{O}_{U, t}[t_1, \dots, t_n]$  noethersch ist, gibt es homogene Elemente  $k_1, \dots, k_p \in \mathcal{K}_t$ , welche  $\mathcal{K}_t$  als  $\mathcal{O}_{U, t}[t_1, \dots, t_n]$ -Ideal erzeugen. Jedes Element  $g \in \mathcal{I}_t$  kann als Reihe  $g = \sum_{m=0}^{\infty} g_m$  mit homogenen Polynomen  $g_m \in \mathcal{O}_{U, t}[t_1, \dots, t_n]$  vom Grad  $m$  dargestellt werden. Aufgrund der Stetigkeit von  $\tilde{f}_t$  in der Folgentopologie gilt dann:

$$0 = \tilde{f}_t(g) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{f}_t(g_m) = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_t(g_m)$$

Nach (2) von Satz 11.2.2 ist obige Darstellung eindeutig. Somit ist  $\varphi_t(g_m) = 0$  und daher  $g_m \in \mathcal{K}_{m, t}$ . Bezeichne nun  $H$  das von  $t_1, \dots, t_n$  in  $\mathcal{O}_{U \times \mathbb{C}^n, (0, t)}$  erzeugte Ideal und sei  $r := \max_{i=1, \dots, p} \deg k_i$ . Für  $m > r$  ist dann  $\mathcal{K}_m \subset H \cdot \mathcal{I}_t$ , und wir erhalten, da  $H \cdot \mathcal{I}_t$  abgeschlossen in der Folgentopologie ist [AS, II.1.2, Korollar zu Satz 6, S. 85]:

$$g = \sum_{m=0}^r g_m + \sum_{i=r+1}^{\infty} g_m \in K + H \cdot \mathcal{I}_t,$$

Das bedeutet, dass  $\mathcal{I}_t = K + H \cdot \mathcal{I}_t$  ist, und mit NAKAYAMA's Lemma erhalten wir  $K = \mathcal{I}_t$ . Insbesondere ist also  $\mathcal{I}_t \cap \mathcal{O}_{U, t}[t_1, \dots, t_n] = \mathcal{K}_t$ .

Nachdem wir  $U$  gegebenenfalls verkleinert haben, können wir Repräsentanten  $\kappa_1, \dots, \kappa_p \in \mathcal{K}(U)$  der Erzeuger von  $\mathcal{K}_s$  wählen. Dann gibt es, da  $\mathcal{I}|_{U \times \{0\}}$  kohärent ist, eine offene Umgebung  $V \subset U \simeq U \times \{0\}$  von  $s$ , so dass  $\mathcal{I}_t$  für alle  $t \in V$  von  $\kappa_{1, t}, \dots, \kappa_{p, t}$  erzeugt wird. Somit wird auch  $\mathcal{K}_t$  für  $t \in V$  von  $\kappa_{1, t}, \dots, \kappa_{p, t}$  als  $\mathcal{O}_{U, t}[t_1, \dots, t_n]$ -Ideal erzeugt.  $\square$

**11.3. Die assoziierte  $\mathcal{O}_S$ -Kegelalgebra eines Kegels.** Wie wir in Satz 11.2.1 gesehen haben, ist  $\mathcal{A}^X$  als graduierte  $\mathcal{O}_S$ -Algebra isomorph zu  $\mathcal{B}^X$ . Wir erhalten daher als unmittelbare Folgerung aus den Sätzen 11.2.2 und 11.2.7:

**SATZ 11.3.1.** *Es sei  $X$  ein komplex analytischer Kegel über  $S$ . Dann ist  $\mathcal{A}^X$  eine  $\mathcal{O}_S$ -Kegelalgebra.*

Der folgende Satz zeigt nun, dass die Zuordnung  $X \rightsquigarrow \mathcal{A}^X$  einen Funktor  $\Psi: (\mathcal{C}\hat{o}n\mathcal{e}/S)^\circ \rightarrow \mathfrak{A}l\mathfrak{g}\mathfrak{r}_{\mathcal{O}_S}^*$  von der Kategorie der komplex analytischen Kegel über  $S$  in die Kategorie  $\mathcal{O}_S$ -Kegelalgebren definiert.

**SATZ 11.3.2.** *Es sei  $f: X \rightarrow Y$  ein Morphismus von komplex analytischen Kegeln über  $S$ . Dann induziert  $\pi_*^Y \tilde{f}: \pi_*^X \mathcal{O}_X \rightarrow \pi_*^Y \mathcal{O}_Y$  einen Morphismus von  $\mathcal{O}_S$ -Kegelalgebren  $\tilde{f}: \mathcal{A}^Y \rightarrow \mathcal{A}^X$ , so dass das folgende Diagramm kommutativ ist:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^Y & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathcal{A}^X \\ i_Y \downarrow \text{kan.} & & \text{kan.} \downarrow i_X \\ \pi_*^Y \mathcal{O}_Y & \xrightarrow{\pi_*^Y \tilde{f}} & \pi_*^X \mathcal{O}_X \end{array} \quad (11.3.a)$$

*Beweis.* Es bezeichne  $\mu_X$  die Multiplikation von  $X$  und  $\mu_Y$  die Multiplikation von  $Y$ . Wir zeigen, dass  $\pi_*^Y \tilde{f}(\mathcal{A}_m^Y) \subset \mathcal{A}_m^X$  für  $m \geq 0$  ist. Sei also  $U \subset S$  offen und  $a \in \mathcal{A}_m^Y(U) \subset \mathcal{O}_Y(\pi_Y^{-1}(U))$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{X, \pi_X^{-1}(U)}(\tilde{f}_{\pi_Y^{-1}(U)}(a)) &= \tilde{\mu}_{X, f^{-1} \circ \pi_Y^{-1}(U)} \circ \tilde{f}_{\pi_Y^{-1}(U)}(a) = \widetilde{(f \circ \mu_X)}_{\pi_Y^{-1}(U)}(a) \\ &\stackrel{(9.4.a)}{=} \widetilde{(\mu_Y \circ (\text{id} \times_S f))}_{\pi_Y^{-1}(U)}(a) = \widetilde{(\text{id} \times_S f)}_{\mu_Y^{-1} \circ \pi_Y^{-1}(U)} \circ \tilde{\mu}_{Y, \pi_Y^{-1}(U)}(a) \\ &\stackrel{(11.1.a)}{=} \widetilde{(\text{id} \times_S f)}_{\pi_{(\mathbb{C} \times_S) \times_S Y}^{-1}(U)}(\tilde{p}'_{1, \pi_{\mathbb{C} \times_S}^{-1}(U)}(\mathfrak{z})^m \cdot \tilde{p}'_{2, \pi_Y^{-1}(U)}(a)) \\ &\stackrel{(3.3.b)}{=} \tilde{p}_{1, \pi_{\mathbb{C} \times_S}^{-1}(U)}(\mathfrak{z})^m \cdot \tilde{p}_{2, \pi_X^{-1}(U)} \circ \tilde{f}_{\pi_Y^{-1}(U)}(a) \\ &= \tilde{p}_{2, \pi_X^{-1}(U)}(\tilde{f}_{\pi_Y^{-1}(U)}(a)) \cdot \mathfrak{T}^m \in \mathcal{A}_m^X(U) \quad \square \end{aligned}$$

## § 12. Beweis des Dualitätssatzes und Anwendungen

In diesem Paragraphen beweisen wir, dass die Kategorie der  $\mathcal{O}_S$ -Kegelalgebren dual zur Kategorie der komplex analytischen Kegel über  $S$  ist und diskutieren einige Anwendungen.

**12.1. Das Axelsson-Magnusson Theorem.** Seien  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  Kategorien. Ein Funktor  $F: \mathcal{C}^\circ \rightarrow \mathcal{D}$  heißt *Antiäquivalenz* von Kategorien, wenn es einen Funktor  $G: \mathcal{D}^\circ \rightarrow \mathcal{C}$  gibt, welcher *quasi-invers* zu  $F$  ist, das heißt, für welchen  $G \circ F^\circ$  isomorph zum Identitätsfunktor von  $\mathcal{C}$  und  $F \circ G^\circ$  isomorph zum Identitätsfunktor von  $\mathcal{D}$  ist. Wir sagen dann auch, dass die Kategorien  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  *dual* zueinander sind.

Ist  $F: \mathcal{C}^\circ \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor, so ist  $F$  genau dann eine Antiäquivalenz von Kategorien, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind (vgl. z.B. [MHA, II.2.7, S. 71]):

- (1)  $F$  ist ein voll treuer Funktor. Das heißt, für alle Paare  $A, B$  von Objekten aus  $\mathcal{C}$  ist die kanonische Abbildung  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(B), F(A))$  bijektiv.
- (2) Für jedes Objekt  $X$  aus  $\mathcal{D}$  existiert ein Objekt  $A$  aus  $\mathcal{C}$ , so dass  $F(A) \simeq X$  ist.

**THEOREM 12.1.1 (Axelsson-Magnusson).** *Der Funktor  $\Phi: \mathcal{A} \rightsquigarrow \text{Specan}(\mathcal{A})$  von der Kategorie der  $\mathcal{O}_S$ -Kegelalgebren in die Kategorie der komplex analytischen Kegel über  $S$  ist eine Antiäquivalenz von Kategorien. Ein Quasi-Inverses von  $\Phi$  ist gegeben durch den Funktor  $\Psi: X \rightsquigarrow \mathcal{A}^X$ .*

Der Beweis des Theorems ist auf die nächsten beiden Abschnitten verteilt. Korollar 12.2.2 ist die eine Richtung und Korollar 12.3.2 die andere.

**12.2. Die Isomorphie  $\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}^X$ .** Wir präzisieren in diesem Abschnitt die Aussage von Satz 6.2.2 für den Fall des analytischen Spektrums einer  $\mathcal{O}_S$ -Kegelalgebra und erhalten auf diese Weise die eine Richtung des Axelsson-Magnusson Theorems.

**SATZ 12.2.1.** *Es sei  $\mathcal{A} = \bigoplus_{m \geq 0} \mathcal{A}_m$  eine  $\mathcal{O}_S$ -Kegelalgebra und  $(X, \pi_X)$  der zu  $\mathcal{A}$  assoziierte komplex analytische Kegel über  $S$ . Bezeichnet  $i_X: \mathcal{A}^X \hookrightarrow \pi_*^X \mathcal{O}_X$  die kanonische Inklusion, dann induziert die Abbildung  $\xi_X^b: \mathcal{A} \rightarrow \pi_*^X \mathcal{O}_X$  einen natürlichen Isomorphismus  $\check{\xi}_X: \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}^X$ , so dass das folgende Diagramm kommutativ ist:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\check{\xi}_X} & \mathcal{A}^X \\ & \searrow \xi_X^b & \swarrow i_X \\ & \pi_*^X \mathcal{O}_X & \end{array} \quad (12.2.a)$$

*Beweis.* Bezeichne  $\mu_X := \text{Specan}(\mu_{\mathcal{A}})$  die Multiplikation von  $X$ . Wir zeigen zunächst, dass  $\xi_X^b(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}^X$  ist. Sei dazu  $m \geq 0$ ,  $U \subset S$  offen und  $a \in \mathcal{A}_m(U)$ , dann ergibt sich folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{X, \pi_X^{-1}(U)} \circ \xi_{X,U}^b(a) &\stackrel{(5.4.c)}{=} \xi_{(\mathbb{C} \times S) \times_S X, U}^b \circ \mu_{\mathcal{A}, U}(a) \stackrel{(10.2.a)}{=} \xi_{(\mathbb{C} \times S) \times_S X, U}^b(t^m \otimes a) \\ &= \xi_{(\mathbb{C} \times S) \times_S X, U}^b(t_1(t^m) \cdot t_2(a)) \\ &\stackrel{(6.1.b)}{=} \tilde{p}_{1, \pi_{\mathbb{C} \times S}^{-1}(U)} \circ \xi_{\mathbb{C} \times S, U}^b(t^m) \cdot \tilde{p}_{2, \pi_X^{-1}(U)} \circ \xi_{X, U}^b(a) \\ &\stackrel{(3.6.a)}{=} \tilde{p}_{1, \pi_{\mathbb{C} \times S}^{-1}(U)}(\mathfrak{z}^m) \cdot \tilde{p}_{2, \pi_X^{-1}(U)}(\xi_{X, U}^b(a)) = \tilde{p}_{2, \pi_X^{-1}(U)}(\xi_{X, U}^b(a)) \cdot \mathfrak{T}^m \end{aligned}$$

Das bedeutet, es ist  $\xi_X^b(\mathcal{A}_m) \subset \mathcal{A}_m^X$  und insbesondere ist  $\xi_X^b(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}^X$ . Wir sehen somit, dass  $\xi_X^b$  eine wohldefinierte Abbildung  $\check{\xi}_X: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^X$  induziert.

Wir zeigen nun, dass  $\check{\xi}_X$  ein Isomorphismus ist. Aus Korollar 4.3.2 wissen wir bereits, dass  $\xi_X^b$  monomorph ist. Es bleibt somit zu zeigen, dass  $\xi_X^b$  epimorph auf  $\mathcal{A}^X$  abbildet. Da dies eine lokale Eigenschaft ist, können wir annehmen, dass  $\mathcal{A} \simeq \mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n]/\mathcal{I}$  ist, wobei  $\mathcal{I}$  ein von endlich vielen globalen Schnitten erzeugtes Ideal in  $\mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n]$  ist. Wir haben dann in jedem Punkt  $s \in S$  das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen (vgl. (4.3.b)):

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}_{S,s}[t_1, \dots, t_n] & \xrightarrow{p} & \mathcal{A}_s & \longrightarrow & 0 \\ \xi_{\mathbb{C}^n \times S, s}^b \downarrow & & \downarrow \xi_{X,s}^b & & \\ \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times S, s} & \xrightarrow{\tilde{j}_s} & \mathcal{O}_{X,s} & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (12.2.b)$$

Die Abbildung  $\xi_{X,s}^b$  ist per Definition gegeben als die Komposition mit der kanonischen Keimabbildung. Wir erhalten daher das folgende kommutative Diagramm (vgl. Abschnitt 11.2):

$$\begin{array}{ccccc} & & \xi_{X,s}^b & & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\ \mathcal{A}_s & \xrightarrow{(\xi_X^b)_s} & (\pi_*^X \mathcal{O}_X)_s & \xrightarrow{q_{X,s}} & \mathcal{O}_{X,s} \\ & \searrow \check{\xi}_{X,s} & \uparrow \text{kan.} & & \uparrow \text{kan.} \\ & & \mathcal{A}_s^X & \xrightarrow{\check{q}_{X,s}} & \mathcal{B}_s^X \end{array} \quad (12.2.c)$$

Wir sehen somit, dass das Bild von  $\xi_{X,s}^b$  in  $\mathcal{B}_s^X$  liegt. Das Nullstellenideal von  $S$  in  $\mathcal{O}_{X,s}$  wird erzeugt von den Elementen:

$$\tilde{J}_s(3i) \stackrel{(3.6.a)}{=} \tilde{J}_s \circ \xi_{\mathbb{C}^n \times S, s}^b(t_i) \stackrel{(12.2.b)}{=} \xi_{X,s}^b \circ p(t_i) \in \mathcal{B}_{+,s}^X \quad (i = 1, \dots, n)$$

Nach Satz 11.2.5 wird  $\mathcal{B}_s^X$  als  $\mathcal{O}_{S,s}$ -Algebra von den  $\xi_{X,s}^b \circ p(t_i)$  erzeugt. Das heißt nun, dass  $\xi_{X,s}^b \circ p$  surjektiv auf  $\mathcal{B}_s^X$  abbildet und daher  $\xi_{X,s}^b$  ebenfalls surjektiv ist.

Es bleibt die Natürlichkeit der Isomorphie zu zeigen. Sei also  $\psi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  ein Morphismus von  $\mathcal{O}_S$ -Kegelalgebren und  $f := \text{Specan}(\psi)$  die durch das analytische Spektrum induzierte Abbildung. Dann ist in dem folgenden Diagramm die Kommutativität des inneren linken Rechtecks zu zeigen.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \xi_Y^b & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 \mathcal{B} & \xrightarrow{\tilde{\xi}_Y} & \Psi \circ \Phi(\mathcal{B}) = \mathcal{A}^Y & \xrightarrow[\text{kan.}]{i_Y} & \pi_*^Y \mathcal{O}_Y \\
 \psi \downarrow & & \Psi \circ \Phi(\psi) = \tilde{f} \downarrow & & \downarrow \pi_*^Y \tilde{f} \\
 \mathcal{A} & \xrightarrow{\tilde{\xi}_X} & \Psi \circ \Phi(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^X & \xrightarrow[\text{kan.}]{i_X} & \pi_*^X \mathcal{O}_X \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 & & \xi_X^b & & 
 \end{array} \tag{12.2.d}$$

Die Kommutativität des oberen und des unteren Dreiecks folgt aus (12.2.a), die des inneren rechten Rechtecks aus (11.3.a). Nach (5.4.c) ist das äußere Rechteck kommutativ und somit folgt, da  $i_X$  und  $i_Y$  injektiv sind, die Kommutativität des inneren linken Rechtecks.  $\square$

**KOROLLAR 12.2.2.** *Der Funktor  $\Psi \circ \Phi$  ist isomorph zum Identitätsfunktor in der Kategorie der  $\mathcal{O}_S$ -Kegelalgebren.*

**12.3. Die Isomorphie  $X \xrightarrow{\sim} \text{Specan}(\mathcal{A}^X)$ .** Wir zeigen nun die andere Richtung des Axelsson-Magnusson Theorems.

**SATZ 12.3.1.** *Es sei  $(X, \pi_X)$  ein komplex analytischer Kegel über  $S$  und  $(X', \pi_{X'})$  der zu  $\mathcal{A}^X$  assoziierte komplex analytische Kegel über  $S$ . Dann ist*

$$f := [\gamma_{\mathcal{A}^X}^{-1}(X)](i_X) : X \longrightarrow X'$$

*ein natürlicher Isomorphismus von komplex analytischen Kegeln über  $S$ , wobei die Abbildung  $i_X : \mathcal{A}^X \hookrightarrow \pi_*^X \mathcal{O}_X$  die kanonische Inklusion bezeichnet.*

*Beweis.* Bezeichne  $\mu_X$  die Multiplikation von  $X$  und  $\mu_{X'} := \text{Specan}(\mu_{\mathcal{A}^X})$  die Multiplikation von  $X'$ . Dann gilt (vgl. (4.4.b)):

$$[\gamma_{\mathcal{A}^X}(X)](f) = \pi_*^{X'} \tilde{f} \circ \xi_X^b = i_X \tag{12.3.a}$$

Wir zeigen zunächst, dass  $f$  ein Morphismus von komplex analytischen Kegeln über  $S$  ist. Das bedeutet, wir müssen für alle komplexen Räume  $T$  über  $S$  die Kom-

mutativität des oberen Rechtecks in dem folgendem Diagramm zeigen:

$$\begin{array}{ccc}
 h_{(\mathbb{C} \times S) \times_S X}(T) & \xrightarrow{h_{\mu_X}(T)} & h_X(T) \\
 h_{\text{id} \times f}(T) \downarrow & & \downarrow h_f(T) \\
 h_{(\mathbb{C} \times S) \times_S X'}(T) & \xrightarrow{h_{\mu_{X'}}(T)} & h_{X'}(T) \\
 \gamma_{\mathcal{O}_S[t] \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}^X}(T) \downarrow \wr & & \downarrow \wr \gamma_{\mathcal{A}^X}(T) \\
 G_{\mathcal{O}_S[t] \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}^X}(T) & \xrightarrow{G_{\mu_{\mathcal{A}^X}}} & G_{\mathcal{A}^X}(T)
 \end{array} \tag{12.3.b}$$

Das untere Rechteck ist kommutativ nach (5.4.a). Das obere Rechteck ist somit genau dann kommutativ, wenn das äußere Rechteck kommutativ ist. Um dies nachzurechnen benötigen wir die Kommutativität des folgenden Diagrammes:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{A}^X & \xrightarrow{\mu_{\mathcal{A}^X}} & \mathcal{O}_S[t] \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}^X \\
 \xi_{X'}^b \downarrow & & \downarrow \xi_{(\mathbb{C} \times S) \times_S X'}^b \\
 \pi_*^{X'} \mathcal{O}_{X'} & & \pi_*^{\mathbb{C} \times X'} \mathcal{O}_{(\mathbb{C} \times S) \times_S X'} \\
 \pi_*^{X'} \tilde{f} \downarrow & & \downarrow \pi_*^{\mathbb{C} \times X'} \widetilde{\text{id} \times f} \\
 \pi_*^X \mathcal{O}_X & \xrightarrow{\pi_*^X \tilde{\mu}_X} & \pi_*^{\mathbb{C} \times X} \mathcal{O}_{(\mathbb{C} \times S) \times_S X}
 \end{array} \tag{12.3.c}$$

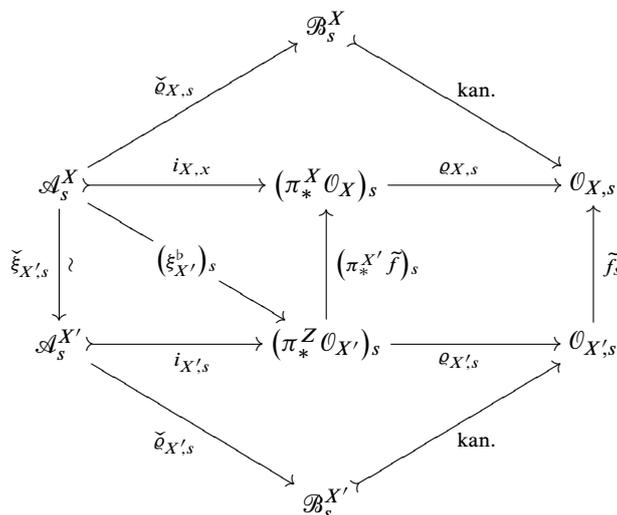
Sei also  $U \subset S$  offen,  $a \in \mathcal{A}_m(U)$  und  $V' := \pi_{(\mathbb{C} \times S) \times_S X'}^{-1}(U)$ , dann gilt:

$$\begin{aligned}
 \widetilde{(\text{id} \times_S f)}_{V'} \circ \xi_{(\mathbb{C} \times S) \times_S X', U}^b \circ \mu_{\mathcal{A}^X, U}(a) &= \widetilde{(\text{id} \times_S f)}_{V'} \circ \xi_{(\mathbb{C} \times S) \times_S X', U}^b(t^m \otimes a) \\
 &= \widetilde{(\text{id} \times_S f)}_{V'} \circ \xi_{(\mathbb{C} \times S) \times_S X', U}^b(\iota_{1, U}(t^m) \cdot \iota_{2, U}(a)) \\
 &\stackrel{(6.1.b)}{=} \widetilde{(\text{id} \times_S f)}_{V'} \left( \tilde{p}'_{1, \pi_{\mathbb{C} \times S}^{-1}(U)} \circ \xi_{\mathbb{C} \times S, U}^b(t^m) \cdot \tilde{p}'_{2, \pi_{X'}^{-1}(U)} \circ \xi_{X', U}^b(a) \right) \\
 &\stackrel{(3.3.b)}{=} \tilde{p}_{1, \pi_{\mathbb{C} \times S}^{-1}(U)} \circ \tilde{\text{id}}_{\pi_{\mathbb{C} \times S}^{-1}(U)} \circ \underbrace{\xi_{\mathbb{C} \times S, U}^b(t^m)}_{\stackrel{(3.6.a)}{=} \delta^m} \cdot \tilde{p}_{2, \pi_{X'}^{-1}(U)} \circ \underbrace{\tilde{f}_{\pi_{X'}^{-1}(U)} \circ \xi_{X', U}^b(a)}_{\stackrel{(12.3.a)}{=} i_{X, U}} \\
 &= \tilde{p}_{1, \pi_{\mathbb{C} \times S}^{-1}(U)}(\delta^m) \cdot \tilde{p}_{2, \pi_{X'}^{-1}(U)}(a) \stackrel{(11.1.a)}{=} \tilde{\mu}_{X, \pi_{X'}^{-1}(U)}(a) \\
 &= \tilde{\mu}_{X, \pi_{X'}^{-1}(U)} \circ i_{X, U}(a) \stackrel{(12.3.a)}{=} \tilde{\mu}_{X, \pi_{X'}^{-1}(U)} \circ \tilde{f}_{X, \pi_{X'}^{-1}(U)} \circ \xi_{X', U}^b(a)
 \end{aligned}$$

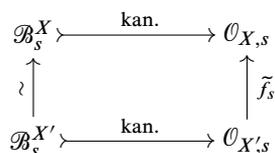
Wir sind nun in der Lage, die Kommutativität des Diagrammes (12.3.b) zu zeigen. Sei dazu  $\phi \in h_{(\mathbb{C} \times S) \times_S X}(T)$ , dann ergibt sich die folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
 [G_{\mu_{\mathcal{A}^X}} \circ \gamma_{\mathcal{O}_S[t] \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}^X} \circ h_{\text{id} \times f}(T)](\phi) &\stackrel{(2.2.d)}{=} [G_{\mu_{\mathcal{A}^X}} \circ \gamma_{\mathcal{O}_S[t] \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}^X}(T)]((\text{id} \times f) \circ \phi) \\
 &\stackrel{(4.4.b)}{=} [G_{\mu_{\mathcal{A}^X}}(T)](\pi_*^{\mathbb{C} \times X'} \widetilde{\text{id} \times f} \circ \phi \circ \xi_{(\mathbb{C} \times S) \times_S X'}^b) \\
 &\stackrel{(4.3.a)}{=} \pi_*^{\mathbb{C} \times X'} \widetilde{\text{id} \times f} \circ \phi \circ \xi_{(\mathbb{C} \times S) \times_S X'}^b \circ \mu_{\mathcal{A}^X} \\
 &= \pi_*^{\mathbb{C} \times X'} \tilde{\phi} \circ \pi_*^{\mathbb{C} \times X'} \widetilde{\text{id} \times f} \circ \xi_{(\mathbb{C} \times S) \times_S X'}^b \circ \mu_{\mathcal{A}^X} \\
 &\stackrel{(12.3.c)}{=} \pi_*^{\mathbb{C} \times X'} \tilde{\phi} \circ \pi_*^X \tilde{\mu}_X \circ \pi_*^{X'} \tilde{f} \circ \xi_{X'}^b = \pi_*^{X'} \widetilde{f \circ \mu_X} \circ \phi \circ \xi_{X'}^b \\
 &\stackrel{(4.4.b)}{=} [\gamma_{\mathcal{A}^X}(T)](f \circ \mu_X \circ \phi) \stackrel{(2.2.d)}{=} [\gamma_{\mathcal{A}^X} \circ h_f \circ h_{\mu_X}(T)](\phi)
 \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass  $\widehat{f}_{|S}: \mathcal{O}_{X'|S} \rightarrow \mathcal{O}_{X|S}$  bijektiv ist. Aus (2) von Satz 9.4.4 folgt dann, dass  $f$  ein Isomorphismus ist. Sei  $s \in S$ , dann haben wir das folgende kommutative Diagramm (oberes und unteres Dreieck (11.2.b), linkes Rechteck (12.3.a) und (12.2.a), rechtes Rechteck vgl. Abschnitt 11.2):

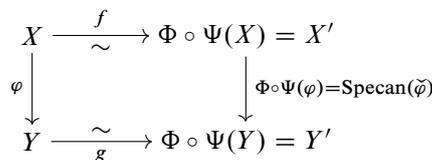


Bilden wir die Komposition der Isomorphismen entlang des linken Randes, so erhalten wir einen Isomorphismus  $\mathcal{B}_s^{X'} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}_s^X$  und das folgende kommutative Diagramm:

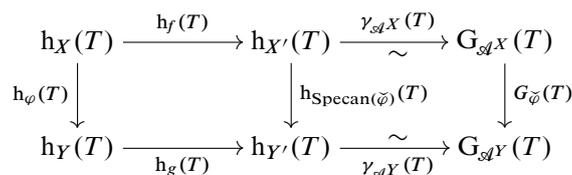


Nach (2) von Satz 11.2.2 liegen  $\mathcal{B}_s^X$  und  $\mathcal{B}_s^{X'}$  dicht in der der Folgentopologie von  $\mathcal{O}_{X,s}$  bzw.  $\mathcal{O}_{X',s}$ . Da  $\tilde{f}_s$  stetig in der Folgentopologie ist, folgt die Bijektivität von  $\tilde{f}_s$ .

Es bleibt die Natürlichkeit der Isomorphie zu zeigen. Das bedeutet, für alle Morphismen  $\varphi: X \rightarrow Y$  von komplex analytischen Kegel über  $S$  ist die Kommutativität des folgenden Diagrammes zu zeigen:



Nach Korollar 2.2.2 ist dieses genau dann kommutativ, wenn das linke Rechteck im nächsten Diagramm für alle komplexen Räume  $T$  über  $S$  kommutativ ist.



Das rechte Rechteck ist nach (5.4.a) kommutativ. Die Kommutativität des linken

Rechtecks ist also gleichbedeutend mit der des äußeren Rechtecks. Sei also  $\phi \in \mathfrak{h}_X(T)$ , dann gilt:

$$\begin{aligned}
& [G_{\check{\varphi}} \circ \gamma_{\mathcal{A}^X} \circ \mathfrak{h}_f(T)](\phi) \stackrel{(2.2.d)}{=} [G_{\check{\varphi}} \circ \gamma_{\mathcal{A}^X}(T)](f \circ \phi) \\
& \stackrel{(4.4.b)}{=} [G_{\check{\varphi}}(T)](\pi_*^{X'} \widetilde{f \circ \phi} \circ \xi_{X'}^b) \stackrel{(4.3.a)}{=} \pi_*^{X'} \widetilde{f \circ \phi} \circ \xi_{X'}^b \circ \check{\varphi} \\
& = \pi_*^X \check{\varphi} \circ \pi_*^{X'} \widetilde{f} \circ \xi_{X'}^b \circ \check{\varphi} \stackrel{(12.3.a)}{=} \pi_*^X \check{\varphi} \circ i_X \circ \check{\varphi} \stackrel{(11.3.a)}{=} \pi_*^X \check{\varphi} \circ \pi_*^Y \check{\varphi} \circ i_Y \\
& \stackrel{(12.3.a)}{=} \pi_*^X \check{\varphi} \circ \pi_*^Y \check{\varphi} \circ \pi_*^{Y'} \widetilde{g} \circ \xi_{Y'}^b = \pi_*^{Y'} \widetilde{g \circ \varphi \circ \phi} \circ \xi_{Y'}^b \\
& \stackrel{(4.4.b)}{=} [\gamma_{\mathcal{A}^{Y'}}(T)](g \circ \varphi \circ \phi) \stackrel{(2.2.d)}{=} [\gamma_{\mathcal{A}^{Y'}} \circ \mathfrak{h}_g \circ \mathfrak{h}_\varphi(T)](\phi) \quad \square
\end{aligned}$$

**KOROLLAR 12.3.2.** *Die Komposition der Funktoren  $\Phi \circ \Psi$  ist isomorph zum Identitätsfunktork in der Kategorie der komplex analytischen Kegel über  $S$ .*

**12.4. Triviale Kegel und Darstellbarkeit.** Sei  $p \in \mathbb{N}^n$ . Dann definiert  $\mathbb{C}^n$  zusammen mit der gewichteten Multiplikation vom Typ  $p$  und dem Nullschnitt  $e_{\mathbb{C}^n} : \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^n$  als Spitze einen komplex analytischen Kegel über dem reduzierten Nullpunkt  $(\{0\}, \mathbb{C})$  (vgl. Abschnitt 8.2). Ist  $S$  ein komplexer Raum, so erhalten wir durch Basiswechsel einen komplex analytischen Kegel  $\mathbb{C}^n \times S$  über  $S$  mit Multiplikation  $\mu_{\mathbb{C}^n \times S}^p := \mu_{\mathbb{C}^n}^p \times \text{id}_S$  und Spitze  $e_{\mathbb{C}^n \times S} := e_{\mathbb{C}^n} \times \text{id}_S$ , welchen wir als den *trivialen komplex analytischen Kegel über  $S$  vom Typ  $p$*  bezeichnen.

**SATZ 12.4.1.** *Ein komplex analytischer Kegel  $X$  über  $S$  ist genau dann isomorph zum trivialen komplex analytischen Kegel über  $S$  vom Typ  $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{N}^n$ , wenn  $\mathcal{A}^X \simeq \mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n]$  und  $\deg t_i = p_i$  ist.*

*Beweis.* Nach Theorem 12.1.1 reicht es, eine Richtung zu zeigen. Sei also  $\mathcal{A} = \mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n]$  mit  $\deg t_i = p_i$  und  $X = \mathbb{C}^n \times S$  der zu  $\mathcal{A}$  assoziierte komplex analytische Kegel über  $S$  mit Multiplikation  $\mu_X := \text{Specan}(\mu_{\mathcal{A}})$  und Spitze  $e_X := \text{Specan}(e_{\mathcal{A}})$ . Für  $i = 1, \dots, n$  gilt dann:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}_{\mathbb{C}^n \times S}^p(\mathfrak{z}i) &= \tilde{\mu}_{\mathbb{C}^n \times S}^p(\tilde{p}'_1(z_i)) \stackrel{(3.3.b)}{=} \tilde{p}_1 \circ \tilde{\mu}_{\mathbb{C}^n}^p(z_i) = \tilde{p}_1(z_i \circ \mu_{\mathbb{C}^n}^p) \\
&\stackrel{(8.2.a)}{=} \tilde{p}_1(z_{n+1}^{p_i} \cdot z_i) = \mathfrak{z}_{n+1}^{p_i} \cdot \mathfrak{z}i \stackrel{(3.6.a)}{=} \xi_{\mathbb{C}^{n+1} \times S}^b(t_{n+1}^{p_i} \otimes t_i) \\
&\stackrel{(10.2.a)}{=} \xi_{\mathbb{C}^{n+1} \times S}^b \circ \mu_{\mathcal{A}}(t_i) \stackrel{(5.4.d)}{=} \tilde{\mu}_X(\mathfrak{z}i)
\end{aligned}$$

Nach Korollar 5.4.2 ist  $\mu_X$  durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt, und daher ist  $\mu_X = \mu_{\mathbb{C}^n \times S}^p$ . Analog folgt  $e_X = e_{\mathbb{C}^n \times S}$ , denn für  $i = 1, \dots, n$  gilt:

$$\begin{aligned}
\tilde{e}_{\mathbb{C}^n \times S}(\mathfrak{z}i) &= \tilde{e}_{\mathbb{C}^n \times S}(\tilde{p}'_1(z_i)) \stackrel{(3.3.b)}{=} \tilde{p}_1 \circ e_{\mathbb{C}^n}(z_i) = \tilde{p}_1(z_i \circ e_{\mathbb{C}^n}) \\
&= \tilde{p}_1(0) = 0 = e_{\mathcal{A}}(t_i) = \xi_S^b \circ e_{\mathcal{A}}(t_i) \stackrel{(5.4.d)}{=} \tilde{e}_X(\mathfrak{z}i) \quad \square
\end{aligned}$$

Ein komplex analytischer Kegel  $X$  über  $S$  heißt *darstellbar*, wenn es für alle  $s \in S$  eine Umgebung  $U$  von  $s$  und ein  $p \in \mathbb{N}^n$  gibt, so dass die Restriktion von  $X$  auf  $\pi^{-1}(U)$  isomorph zu einem Unterkegel des trivialen komplex analytischen Kegels über  $U$  vom Typ  $p$  ist.

**SATZ 12.4.2.** *Jeder komplex analytische Kegel über  $S$  ist darstellbar.*

*Beweis.* Sei  $X$  ein komplex analytischer Kegel über  $S$ . Nach Theorem 12.1.1 können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $X = \text{Specan}(\mathcal{A})$  ist. Da es sich um eine lokale Aussage handelt, können wir außerdem annehmen, dass

$\mathcal{A}^X \simeq \mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n]/\mathcal{I}$  ist, wobei  $\mathcal{I}$  ein von endlich vielen globalen Schnitten erzeugtes Ideal ist. Wir haben dann einen  $\mathcal{O}_S$ -Algebraepimorphismus

$$\varphi: \mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n] \longrightarrow \mathcal{A},$$

welcher durch  $p_i := \deg t_i := \deg \varphi(t_i)$  zu einem Morphismus von graduierten  $\mathcal{O}_S$ -Algebren wird. Nach Satz 12.4.1 ist der zu  $\mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n]$  assoziierte komplex analytische Kegel über  $S$  gegeben durch den trivialen komplex analytischen Kegel  $\mathbb{C}^n \times S$  über  $S$  vom Typ  $p$ . Die Abbildung  $\varphi$  induziert somit einen Morphismus

$$\text{Specan}(\varphi): X \longrightarrow \mathbb{C}^n \times S$$

von komplex analytischen Kegel über  $S$ , welcher nach Satz 5.4.3 eine abgeschlossene Einbettung ist.  $\square$

Als Korollar ergibt sich, dass komplex analytische Unterkegel des  $\mathbb{C}^n$  algebraisch sind:

**KOROLLAR 12.4.3.** *Es sei  $X$  ein komplex analytischer Kegel über einem reduzierten Punkt. Dann gibt es ein  $p \in \mathbb{N}^n$ , so dass  $X$  isomorph zu einem Unterkegel des  $\mathbb{C}^n$  mit gewichteter Multiplikation vom Typ  $p$  ist, welcher durch endlich viele quasi-homogene Polynome vom Typ  $p$  definiert wird.*

**12.5. Die Garbe der homogenen Schnitte eines Produktes.** Seien  $(X, \pi_X)$  und  $(Y, \pi_Y)$  komplex analytische Kegel über  $S$  mit Multiplikationen  $\mu_X$  und  $\mu_Y$ . Dann ist  $X \times_S Y$  zusammen mit der entsprechenden, durch  $\mu_X$  und  $\mu_Y$  induzierten Multiplikation (vgl. Abschnitt 9.5) ein komplex analytischer Kegel über  $S$ . Nach Satz 12.3.1 haben wir natürliche Isomorphismen  $X \simeq \text{Specan}(\mathcal{A}^X)$ ,  $Y \simeq \text{Specan}(\mathcal{A}^Y)$  und  $X \times_S Y \simeq \text{Specan}(\mathcal{A}^{X \times_S Y})$  von komplex analytischen Kegeln über  $S$ . Der natürliche Isomorphismus

$$\text{Specan}(\mathcal{A}^X \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}^Y) \xrightarrow{\sim} \text{Specan}(\mathcal{A}^X) \times_S \text{Specan}(\mathcal{A}^Y)$$

ist nach Satz 10.3.1 ein Morphismus von komplex analytischen Kegeln über  $S$ . Wir erhalten somit die folgenden natürlichen Isomorphismen von komplex analytischen Kegeln über  $S$ :

$$\begin{aligned} \text{Specan}(\mathcal{A}^{X \times_S Y}) &\simeq X \times_S Y \simeq \text{Specan}(\mathcal{A}^X) \times_S \text{Specan}(\mathcal{A}^Y) \\ &\simeq \text{Specan}(\mathcal{A}^X \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}^Y) \end{aligned}$$

Insbesondere haben wir einen natürlichen Isomorphismus  $\mathcal{A}^X \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}^Y \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}^{X \times_S Y}$  von  $\mathcal{O}_S$ -Kegelalgebren. Das folgende kommutative Diagramm verdeutlicht die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Abbildungen:

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{A}^X & \xrightarrow{i_X} & \pi_*^X \mathcal{O}_X \\ & \swarrow \iota_1 & & \searrow \pi_*^X \tilde{p}_1 & \\ & & \mathcal{A}^X \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}^Y & \xrightarrow{\xi_{X \times_S Y}^b} & \pi_*^{X \times_S Y} \mathcal{O}_{X \times_S Y} \\ & \swarrow \iota_2 & \mathcal{A}^Y & \xrightarrow{i_Y} & \pi_*^Y \mathcal{O}_Y \\ & & & & \pi_*^X \tilde{p}_2 \end{array} \quad (12.5.a)$$

$\mathcal{A}^X \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}^Y \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}^{X \times_S Y} \xrightarrow{i_{X \times_S Y}} \pi_*^{X \times_S Y} \mathcal{O}_{X \times_S Y}$

**12.6. Approximation von Schnitten.** Sei  $P$  ein Polyzyylinder im  $\mathbb{C}^n$ . Dann lässt sich jedes  $f \in \mathcal{O}_P(P)$  durch homogene Polynome in der Topologie der kompakten Konvergenz approximieren. Wir zeigen nun eine analoge Aussage für komplex analytische Kegel über  $S$ . Die Topologie der kompakten Konvergenz wird dabei durch die kanonische Topologie [TSR, HFSV] ersetzt und die Rolle der Polynome wird von den homogenen Schnitten übernommen.

**SATZ 12.6.1.** *Es sei  $X$  ein komplex analytischer Kegel über  $S$  und  $U \subset S$  offen. Dann lässt sich in der kanonischen Topologie jedes  $f \in \mathcal{O}_X(\pi_X^{-1}(U))$  eindeutig als konvergente Reihe  $f = \sum_{m=0}^{\infty} a_m$  mit Koeffizienten  $a_m \in \mathcal{A}_m^X(U)$  darstellen.*

*Beweis.* (a) Nehmen wir zunächst an, dass  $S$  abgeschlossener komplexer Unterraum eines Polyzyinders  $P$  und  $X$  Unterkegel eines trivialen komplex analytischen Kegels über  $S$  vom Typ  $p$  ist. Es bezeichne  $\varphi: S \hookrightarrow P$  und  $\psi: X \hookrightarrow \mathbb{C}^n \times S$  die kanonischen abgeschlossenen Einbettungen und  $j$  die Komposition  $(\text{id} \times \varphi) \circ \psi$ . Dann haben wir das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & j & & \\
 & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\
 X & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{C}^n \times S & \xrightarrow{\text{id} \times \varphi} & \mathbb{C}^n \times P \\
 & \searrow \pi_X & \downarrow \pi_{\mathbb{C}^n \times S} & & \downarrow \pi_{\mathbb{C}^n \times P} \\
 & & S & \xrightarrow{\varphi} & P
 \end{array}$$

Kompositionen [CAS, 1.2.7, S. 21] und direkte Produkte [CAS, 1.3.4, S. 27] abgeschlossener Einbettungen sind wieder abgeschlossene Einbettungen und daher ist  $j$  eine abgeschlossene Einbettung. Nach Voraussetzung ist  $X$  ein komplex analytischer Unterkegel von  $\mathbb{C}^n \times S$  und somit das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{C} \times X & \xrightarrow{\mu_X} & X & & \\
 \downarrow \text{id} \times \psi & & \downarrow \psi & & \\
 \mathbb{C} \times (\mathbb{C}^n \times S) & \xrightarrow{\mu_{\mathbb{C}^n \times S}^p} & \mathbb{C}^n \times S & & \\
 \downarrow \text{id} \times (\text{id} \times \varphi) & \text{=} \mu_{\mathbb{C}^n}^p \times \text{id}_S & \downarrow \text{id} \times \varphi & & \\
 \mathbb{C} \times (\mathbb{C}^n \times P) & \xrightarrow{\mu_{\mathbb{C}^n \times P}^p} & \mathbb{C}^n \times P & & \\
 \downarrow \text{id} \times j & & \downarrow j & & \\
 \mathbb{C} \times X & & X & & 
 \end{array}$$

Folglich ist  $j: (X, \varphi \circ \pi_X) \hookrightarrow \mathbb{C}^n \times P$  ein Morphismus von komplex analytischen Kegeln über  $P$ . Da  $\mathbb{C}^n \times P$  Steinsch ist [TSR, Kap. V, § 1, Satz 1, S. 129], ist

$$\tilde{j}: \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times P}(\mathbb{C}^n \times P) \longrightarrow \mathcal{O}_X(X)$$

surjektiv. Es gibt also ein  $F \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times P}(\mathbb{C}^n \times P)$  mit  $\tilde{j}(F) = f$ . Die Taylorentwicklung von  $F$  konvergiert auf jeder kompakten Teilmenge normal gegen  $F$  [HFCM, I, Theorem 4.2, S. 19]. Nach Umsortieren erhalten wir somit eine Potenzreihenentwicklung

$$\sum_{v \geq 0} F_v z^v$$

von  $F$  mit Koeffizienten  $F_\nu \in \mathcal{O}_P(P)$ , welche in der Topologie der kompakten Konvergenz konvergiert. Wir setzen nun:

$$A_m := \sum_{\substack{\nu \geq 0 \\ \nu_1 p_1 + \dots + \nu_n p_n = m}} F_\nu z^\nu$$

Dann ist  $A_m \in \mathcal{A}_m^{\mathbb{C}^n \times P}(P)$  und  $F = \sum_{m \geq 0} A_m$ . Da  $j$  ein Morphismus von komplex analytischen Kegeln über  $P$  ist, liegt die analytische Restriktion  $a_m := \tilde{j}(A_m)$  nach Satz 11.3.2 in  $\mathcal{A}_m^X(S) \subset \mathcal{O}_X(X)$ . Wir erhalten somit, da  $\tilde{j}$  stetig in der kanonischen Topologie ist [TSR, Kap. V, § 6, Satz 6, S. 171]:

$$f = \tilde{j}(F) = \tilde{j}\left(\sum_{m \geq 0} A_m\right) = \sum_{m \geq 0} \tilde{j}(A_m) = \sum_{m \geq 0} a_m$$

(b) Betrachten wir nun den allgemeinen Fall. Nach Satz 12.4.1 ist  $X$  darstellbar. Es gibt daher eine offene Überdeckung  $\{U_i\}_{i \in I}$  von  $U$ , so dass  $U_i$  isomorph zu einem abgeschlossenen komplexen Unterraum eines Polyzylinders und  $V_i := \pi_X^{-1}(U_i)$  isomorph zu einem Unterkegel eines trivialen komplex analytischen Kegels über  $U_i$  vom Typ  $p_i$  ist. Gemäß (a) gibt es  $a_{i,m} \in \mathcal{A}_m^X(U_i)$ , so dass

$$f|_{V_i} = \sum_{m \geq 0} a_{i,m}$$

in der kanonischen Topologie von  $\mathcal{O}_X(V_i)$  ist. Ist  $\mathcal{O}_{X,s}$  mit der Folgentopologie versehen, so sind die Restriktionen  $\rho_s^{V_i}: \mathcal{O}_X(V_i) \rightarrow \mathcal{O}_{X,s}$  für alle  $s \in U_i$  stetig [TSR, Kap. V, § 6, Satz 5, S. 168]. Wir erhalten somit:

$$f_s = \rho_s^{V_i}(f|_{V_i}) = \rho_s^{V_i}\left(\sum_{m \geq 0} a_{i,m}\right) = \sum_{m \geq 0} \rho_s^{V_i}(a_{i,m})$$

Diese Darstellung von  $f_s$  als Reihe ist nach (2) von Satz 11.2.2 für alle  $s \in U_i$  eindeutig. Ist  $U_{ij} := U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , so ist  $\rho_s^{V_i}(a_{i,m}) = \rho_s^{V_j}(a_{j,m})$  für alle  $s \in U_{ij}$  und daher  $\rho_{U_{ij}}^{V_i}(a_{i,m}) = \rho_{U_{ij}}^{V_j}(a_{j,m})$ . Da homogene Schnitte nach Satz 11.2.1 bereits durch ihre Keime in den Punkten der Spitze eindeutig bestimmt sind, erhalten wir:

$$\rho_{V_i \cap V_j}^{V_i}(a_{i,m}) = \rho_{V_i \cap V_j}^{V_j}(a_{j,m})$$

Das bedeutet, die  $a_{i,m}$  stimmen auf den Durchschnitten der Überdeckung überein und verkleben somit zu eindeutigen Schnitten  $a_m \in \mathcal{A}_m^X(U)$ , so dass  $a_m|_{U_i} = a_{i,m}$  ist.  $\square$

**KOROLLAR 12.6.2.** *Es sei  $X$  ein komplex analytischer Kegel über  $S$ . Dann gilt für die Garbe der homogenen Schnitte über  $U \subset S$  offen:*

$$\mathcal{A}_m^X(U) = \left\{ f \in \mathcal{O}_X(\pi_X^{-1}(U)) \mid \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} : \tilde{\mu}_{X, \pi_X^{-1}(U)}^\lambda(f) = \lambda^m f \right\}$$

*Beweis.* Ist  $f \in \mathcal{A}_m^X(U)$ , so ist  $\tilde{\mu}_{X, \pi_X^{-1}(U)}^\lambda(f) = \lambda^m f$  für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Sei also umgekehrt  $f \in \mathcal{O}_X(\pi_X^{-1}(U))$  und existiere  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ , so dass  $\tilde{\mu}_{X, \pi_X^{-1}(U)}^\lambda(f) = \lambda^m f$  ist. Nach Satz 12.6.1 haben wir eine eindeutige Reihendarstellung  $f = \sum_{k \geq 0} a_k$  mit  $a_k \in \mathcal{A}_k^X(U)$  und erhalten somit:

$$\begin{aligned} \sum \lambda^m a_k &= \lambda^m f = \tilde{\mu}_{X, \pi_X^{-1}(U)}^\lambda(f) = \tilde{\mu}_{X, \pi_X^{-1}(U)}^\lambda\left(\sum a_k\right) \\ &= \sum \tilde{\mu}_{X, \pi_X^{-1}(U)}^\lambda(a_k) = \sum \lambda^k a_k \end{aligned}$$

Die Reihendarstellung von  $\lambda^m f$  ist eindeutig, und daher folgt durch Vergleich der Koeffizienten  $a_k = 0$  für  $k \neq m$ .  $\square$

**KOROLLAR 12.6.3.** *Es seien  $X$  und  $Y$  komplex analytische Kegel über  $S$  mit Multiplikationen  $\mu_X$  und  $\mu_Y$ . Dann ist ein Morphismus  $f: X \rightarrow Y$  von komplexen Räumen über  $S$  genau dann ein Morphismus von komplex analytischen Kegeln über  $S$ , wenn ein  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  existiert, so dass das folgende Diagramm kommutativ ist:*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\mu_X^\lambda} & X \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{\mu_Y^\lambda} & Y \end{array}$$

*Beweis.* ( $\Rightarrow$ ) Sei  $f$  ein Morphismus von komplexen Räumen über  $S$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$ , so dass  $\mu_Y^\lambda \circ f = f \circ \mu_X^\lambda$  ist. Aus Satz 11.3.2 folgt zusammen mit Theorem 12.1.1, dass  $f$  genau dann ein Morphismus von komplex analytischen Kegeln über  $S$  ist, wenn  $\pi_*^X \tilde{f}(\mathcal{A}_m^Y) \subset \mathcal{A}_m^X$  für alle  $m$  ist. Sei also  $U \subset S$  offen und  $a \in \mathcal{A}_m^Y(U)$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{X, \pi_X^{-1}(U)}^\lambda(\tilde{f}_{\pi_Y^{-1}(U)}(a)) &= \tilde{f}_{\pi_Y^{-1}(U)} \circ \tilde{\mu}_{Y, \pi_Y^{-1}(U)}^\lambda(a) \\ &= \tilde{f}_{\pi_Y^{-1}(U)}(\lambda^m a) = \lambda^m \tilde{f}_{\pi_Y^{-1}(U)}(a) \end{aligned}$$

Mit Korollar 12.6.2 folgt somit, dass  $\tilde{f}_{\pi_Y^{-1}(U)}(a) \in \mathcal{A}_m^X(U)$  ist.

( $\Leftarrow$ ) Ist  $f$  ein Morphismus von komplex analytischen Kegeln über  $S$ , so besagt Satz 9.4.3, dass  $\mu_Y^\lambda \circ f = f \circ \mu_X^\lambda$  für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$  ist.  $\square$

## Die Dualität von linearen Räumen und kohärenten Moduln

Wir zeigen in diesem Kapitel, dass die Kategorie der  $\mathcal{O}_S$ -Moduln dual zur Kategorie der linearen Räume über  $S$  ist. Wir folgen dabei nicht dem Originalbeweis von FISCHER und PRILL [Fis67, Pri68], sondern nutzen die bisher erhaltenen Ergebnisse über komplex analytische Kegel über  $S$ . Grundlage hierfür ist der skizzierte Beweis von AXELSSON und MAGNUSSON aus [AM86].

### § 13. Komplex analytische Gruppen

Wir betrachten in diesem Paragraphen komplex analytische Gruppen und zeigen, dass das analytische Spektrum einer endlich präsentierten  $\mathcal{O}_S$ -Bigeбра eine komplex analytische Gruppe über  $S$  ist.

**13.1. Definition komplex analytischer Gruppen.** Sei  $S$  ein komplexer Raum. Eine *komplex analytische Gruppe über  $S$*  ist ein komplexer Raum  $(X, \pi_X)$  über  $S$  zusammen mit einer funktoriellen Gruppenstruktur auf  $h_X(T)$  für alle komplexen Räume  $T$  über  $S$ . Das bedeutet, für alle komplexen Räume  $T$  über  $S$  ist  $h_X(T)$  eine Gruppe, und die Addition auf  $h_X(T)$  induziert einen funktorieller Morphismus  $h_X \rightarrow h_X$ . Dies ist gleichbedeutend damit, dass  $h_X(f): h_X(T) \rightarrow h_X(T')$  für alle Morphismen  $f: T \rightarrow T'$  von komplexen Räumen über  $S$  ein Gruppenhomomorphismus ist. Ist die Gruppenstruktur auf  $h_X(T)$  für jeden komplexen Raum  $T$  über  $S$  abelsch, so nennen wir  $X$  eine *abelsche* komplex analytische Gruppe über  $S$ .

Der folgende Satz zeigt, dass komplex analytische Gruppen über  $S$  auch mittels kommutativer Diagramme definiert werden können:

**SATZ 13.1.1.** *Ein komplexer Raum  $(X, \pi_X)$  über  $S$  ist genau dann eine komplex analytische Gruppe über  $S$ , wenn Morphismen  $\alpha_X: X \times_S X \rightarrow X$ ,  $\iota_X: X \rightarrow X$  und  $e_X: S \rightarrow X$  von komplexen Räumen über  $S$  existieren, so dass die folgenden Diagramme kommutativ sind:*

$$\begin{array}{ccc}
 X \times_S X \times_S X & \xrightarrow{\alpha_X \times \text{id}_X} & X \times_S X \\
 \text{id}_X \times \alpha_X \downarrow & & \downarrow \alpha_X \\
 X \times_S X & \xrightarrow{\alpha_X} & X
 \end{array} \tag{13.1.a}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 X \times_S X & \xrightarrow{\iota_X \times \text{id}_X} & X \times_S X & & \\
 \Delta_X \uparrow & & \downarrow \alpha_X & & \\
 X & \xrightarrow{\pi_X} & S & \xrightarrow{e_X} & X
 \end{array} \tag{13.1.b}$$

$$\begin{array}{ccc}
 X \times_S X & \xrightarrow{\pi_X \times \text{id}} & S \times_S X \\
 \Delta_X \uparrow & & \downarrow e_X \times \text{id}_X \\
 X & \xleftarrow{\alpha_X} & X \times_S X
 \end{array} \tag{13.1.c}$$

Der komplexe Raum  $(X, \pi_X)$  ist genau dann eine komplex analytische abelsche Gruppe über  $S$ , wenn zusätzlich zu den obigen Diagrammen das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc}
 X \times_S X & \xrightarrow{\sigma} & X \times_S X \\
 \searrow \alpha_X & & \swarrow \alpha_X \\
 & X &
 \end{array} \tag{13.1.d}$$

Dabei bezeichnet  $\sigma: X \times_S X \rightarrow X \times_S X$  die Permutation der beiden Faktoren.

*Beweis.* [TCF, Theorem 4.1, S. 75] □

*Bezeichnung.* Wir nennen  $\alpha_X: X \times_S X \rightarrow X$  die *Addition*,  $\iota_X: X \rightarrow X$  die *Inversion* und  $e_X: S \rightarrow X$  die *Identität* der komplex analytischen Gruppe  $X$ .

**13.2. Morphismen von komplex analytischen Gruppen.** Seien  $X, Y$  komplex analytische Gruppen über  $S$ . Wir nennen einen Morphismus  $f: X \rightarrow Y$  von komplexen Räumen über  $S$  einen *Morphismus von komplex analytischen Gruppen über  $S$* , wenn  $h_f(T): h_X(T) \rightarrow h_Y(T)$  für alle komplexen Räume  $T$  über  $S$  ein Gruppenhomomorphismus ist.

**SATZ 13.2.1.** *Es seien  $X$  und  $Y$  komplex analytische Gruppen über  $S$  mit Additionen  $\alpha_X$  und  $\alpha_Y$ . Ein Morphismus von komplexen Räumen über  $S$  ist genau dann ein Morphismus von komplex analytischen Gruppen über  $S$ , wenn das folgende Diagramm kommutativ ist:*

$$\begin{array}{ccc}
 X \times_S X & \xrightarrow{\alpha_X} & X \\
 f \times f \downarrow & & \downarrow f \\
 Y \times_S Y & \xrightarrow{\alpha_Y} & Y
 \end{array} \tag{13.2.a}$$

*Beweis.* Die Aussage folgt mit Korollar 2.2.2 (vgl. Beweis von Satz 9.4.1 und [TCF, Bemerkung zu Theorem 4.1, S. 80]). □

**13.3. Die assoziierte Gruppe einer  $\mathcal{O}_S$ -Bigeбра.** Eine *bikommutative  $\mathcal{O}_S$ -Bigeбра*  $\mathcal{B}$  ist eine (kommutative)  $\mathcal{O}_S$ -Algebra zusammen mit  $\mathcal{O}_S$ -Algebromorphismen  $\alpha_{\mathcal{B}}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{B}$ ,  $\iota_{\mathcal{B}}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$  und  $e_{\mathcal{B}}: \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{B}$ , so dass die folgenden Diagramme kommutativ sind (vgl. [MHA, II.3.10, S. 83]):

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{B} & \xleftarrow{\alpha_{\mathcal{B}} \otimes \text{id}_{\mathcal{B}}} & \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{B} \\
 \text{id}_{\mathcal{B}} \otimes \alpha_{\mathcal{B}} \uparrow & & \uparrow \alpha_{\mathcal{B}} \\
 \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{B} & \xleftarrow{\alpha_{\mathcal{B}}} & \mathcal{B}
 \end{array} \tag{13.3.a}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{B} & \xleftarrow{\iota_{\mathcal{B}} \otimes \text{id}_{\mathcal{B}}} & \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{B} \\
 \Delta_{\mathcal{B}} \downarrow & & \uparrow \alpha_{\mathcal{B}} \\
 \mathcal{B} & \xleftarrow[\pi_{\mathcal{B}}]{e_{\mathcal{B}}} \mathcal{O}_S & \mathcal{B}
 \end{array} \tag{13.3.b}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{B} & \xleftarrow{\pi_{\mathcal{B}} \otimes \text{id}_{\mathcal{B}}} & \mathcal{O}_S \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{B} \\
 \Delta_{\mathcal{B}} \downarrow & & \uparrow e_{\mathcal{B}} \otimes \text{id}_{\mathcal{B}} \\
 \mathcal{B} & \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{B}}} & \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{B}
 \end{array} \tag{13.3.c}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{B} & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{B} \\
 \swarrow \alpha_{\mathcal{B}} & & \nearrow \alpha_{\mathcal{B}} \\
 & \mathcal{B} &
 \end{array} \tag{13.3.d}$$

Dabei bezeichnet  $\sigma: \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{B}$  die Permutation der beiden Faktoren.  
 Wir nennen  $\alpha_{\mathcal{B}}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{B}$  die *Koaddition*,  $\iota_{\mathcal{B}}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$  die *Koinversion* und  $e_{\mathcal{B}}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{O}_S$  die *Koidentität* der  $\mathcal{O}_S$ -Bigeбра  $\mathcal{B}$ . Da die Diagramme (13.3.a)-(13.3.d) dual zu den Diagrammen (13.1.a)-(13.1.d) sind, erhalten wir somit:

**SATZ 13.3.1.** *Es sei  $\mathcal{B}$  eine endlich präsentierte bikommutative  $\mathcal{O}_S$ -Bigeбра mit Koaddition  $\alpha_{\mathcal{B}}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$ , Koinversion  $\iota_{\mathcal{B}}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$  und Koeinheit  $e_{\mathcal{B}}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{O}_S$ . Dann ist  $(X, \pi_X) := \text{Specan}(\mathcal{B})$  zusammen mit  $\alpha_X := \text{Specan}(\alpha_{\mathcal{B}}): X \rightarrow X \times_S X$  als Addition,  $\iota_X := \text{Specan}(\iota_{\mathcal{B}}): X \rightarrow X$  als Inversion und  $e_X := \text{Specan}(e_{\mathcal{B}}): S \rightarrow X$  als Einheit eine komplex analytische abelsche Gruppe über  $S$ .*

### § 14. Lineare Räume

Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis der Dualität von linearen Räumen und kohärenten Moduln unter der Verwendung des Axelsson-Magnusson Theorems 12.1.1. Wir beginnen mit der Definition von linearen Räumen und deren Morphismen. Im Anschluss untersuchen wir die Garbe der homogenen Schnitte eines linearen Raumes und zeigen, dass das analytische Spektrum der symmetrischen Algebra eines kohärenten  $\mathcal{O}_S$ -Moduln ein linearer Raum über  $S$  ist. Wir beweisen dann den Dualitätssatz und zeigen als Anwendung die Darstellbarkeit von linearen Räumen.

**14.1. Definition linearer Räume.** Ein komplexer Raum  $X$  über  $S$  zusammen mit einer funktoriellen  $h_{\mathbb{C} \times S}(T)$ -Modulstruktur auf  $h_X(T)$  für alle komplexen Räume  $T$  über  $S$  heißt *linearer Raum über  $S$* . Ist  $X$  ein linearer Raum, so ist  $X$  also insbesondere eine komplex analytische abelsche Gruppe über  $S$  und ein komplex analytischer Kegel über  $S$ .

**SATZ 14.1.1.** *Ein komplexer Raum  $(X, \pi_X)$  über  $S$  ist genau dann ein linearer Raum über  $S$ , wenn es Morphismen  $\alpha_X: X \times_S X \rightarrow X$ ,  $\mu_X: (\mathbb{C} \times S) \times_S X \rightarrow X$ ,  $e_X: S \rightarrow X$  von komplexen Räumen über  $S$  gibt, so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:*

- (1)  $(X, \pi)$  mit  $\alpha_X$  als Addition,  $\mu_X^{(-1)}: X \rightarrow X$  als Inversion und  $e_X: S \rightarrow X$  als Einheit ist eine komplex analytische abelsche Gruppe über  $S$ , wobei  $\mu_X^{(-1)}$  die elementweise Multiplikation mit  $-1$  bezeichnet (vgl. 9.2).
- (2)  $(X, \pi)$  mit  $\mu_X$  als Multiplikation und  $e_X$  als Spitze ist ein komplex analytischer Kegel über  $S$ .

(3) Gruppen- und Kegelstruktur sind distributiv verträglich. Das heißt, die beiden folgenden Diagramme sind kommutativ:

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathbb{C} \times S) \times_S X \times_S X & \longrightarrow & (\mathbb{C} \times S) \times_S X \times_S (\mathbb{C} \times S) \times_S X \\
 \text{id}_{\mathbb{C} \times S} \times \alpha_X \downarrow & & \downarrow \mu_X \times \mu_X \\
 (\mathbb{C} \times S) \times_S X & \xrightarrow{\mu_X} X \xleftarrow{\alpha_X} X \times_S X & 
 \end{array} \quad (14.1.a)$$

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathbb{C} \times S) \times_S (\mathbb{C} \times S) \times_S X & \longrightarrow & (\mathbb{C} \times S) \times_S X \times_S (\mathbb{C} \times S) \times_S X \\
 \alpha_{\mathbb{C} \times S} \times \text{id}_X \downarrow & & \downarrow \mu_X \times \mu_X \\
 (\mathbb{C} \times S) \times_S X & \xrightarrow{\mu_X} X \xleftarrow{\alpha_X} X \times_S X & 
 \end{array} \quad (14.1.b)$$

*Beweis.* Für (1) und (2) siehe Satz 9.1.1 und Satz 13.1.1. Die Aussage von (3) folgt mit Korollar 2.2.2 aus den entsprechenden durch die funktorielle Modulstruktur gegebenen kommutativen Diagrammen.  $\square$

**14.2. Morphismen von linearen Räumen.** Sind  $X, Y$  lineare Räume über  $S$ , so heißt ein Morphismus  $f: X \rightarrow Y$  von komplexen Räumen über  $S$  ein *Morphismus von linearen Räumen über  $S$*  oder kurz eine *lineare Abbildung*, wenn die Abbildung  $h_X(f): h_X(T) \rightarrow h_Y(T)$  für alle komplexen Räume  $T$  über  $S$  eine  $h_{\mathbb{C} \times S}(T)$ -lineare Abbildung ist.

**SATZ 14.2.1.** *Es seien  $X, Y$  lineare Räume über  $S$  mit Additionen  $\alpha_X, \alpha_Y$  und Multiplikationen  $\mu_X, \mu_Y$ . Ein Morphismus  $f: X \rightarrow Y$  von komplexen Räumen über  $S$  ist genau dann ein Morphismus von linearen Räumen über  $S$ , wenn die beiden folgenden Diagramme kommutativ sind:*

$$\begin{array}{ccc}
 X \times_S X & \xrightarrow{\alpha_X} & X \\
 f \times f \downarrow & & \downarrow f \\
 Y \times_S Y & \xrightarrow{\alpha_Y} & Y
 \end{array} \quad (14.2.a)$$

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathbb{C} \times S) \times_S X & \xrightarrow{\mu_X} & X \\
 \text{id} \times f \downarrow & & \downarrow f \\
 (\mathbb{C} \times S) \times_S Y & \xrightarrow{\mu_Y} & Y
 \end{array} \quad (14.2.b)$$

*Beweis.* Folgt aus Satz 13.2.1 und Satz 9.4.1.  $\square$

**14.3. Die Garbe der homogenen Schnitte eines linearen Raumes.** Sei  $X$  ein linearer Raum über  $S$ . Fassen wir  $X \times_S X$  als komplex analytischen Kegel über  $S$  mit der entsprechenden durch die Multiplikation auf  $X$  induzierten Multiplikation auf (vgl. Abschnitt 9.5), so besagt das erste Distributivgesetz (14.1.a) gerade, dass die Abbildung  $\alpha_X: X \rightarrow X \times_S X$  ein Morphismus von komplex analytischen Kegeln über  $S$  ist. Nach Satz 11.3.2 gibt es somit einen Morphismus  $\tilde{\alpha}_X: \mathcal{A}^X \rightarrow \mathcal{A}^{X \times_S X}$  von  $\mathcal{O}_S$ -Kegelalgebren. Durch Komposition mit dem Isomorphismus  $\tilde{\xi}_{X \times_S X}$  (vgl. 12.5.a) erhalten wir einen Morphismus  $\alpha_{\mathcal{A}^X}: \mathcal{A}^X \rightarrow \mathcal{A}^X \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}^X$ , so dass das folgende Diagramm

kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \alpha_{\mathcal{A}^X} & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 \mathcal{A}^X & \xrightarrow{\tilde{\alpha}_X} & \mathcal{A}^{X \times_S X} & \xleftarrow{\tilde{\xi}_{X \times_S X}} & \mathcal{A}^X \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}^X \\
 \downarrow i_X & & \downarrow i_{X \times_S X} & & \downarrow \xi_{X \times_S X}^b \\
 \pi_*^X \mathcal{O}_X & \xrightarrow{\pi_*^X \tilde{\alpha}_X} & \pi_*^{X \times_S X} \mathcal{O}_{X \times_S X} & \xlongequal{\quad} & \pi_*^{X \times_S X} \mathcal{O}_{X \times_S X}
 \end{array} \quad (14.3.a)$$

SATZ 14.3.1. Es sei  $X$  ein linearer Raum über  $S$  und  $s \in S$  gegeben. Bezeichnet  $\alpha_{\mathcal{A}^X}: \mathcal{A}^X \rightarrow \mathcal{A}^X \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}^X$  den durch die Addition induzierten Morphismus von  $\mathcal{O}_S$ -Kegelmangebren, und ist  $a_m \in \mathcal{A}_{m,s}^X$  sowie

$$\alpha_{\mathcal{A}^X,s}(a_m) = \sum_{i=0}^m \sum_j b_{i,j} \otimes c_{m-i,j} \in \underbrace{\bigoplus_{i=0}^m \mathcal{A}_{i,s}^X \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} \mathcal{A}_{m-i,s}^X}_{= (\mathcal{A}_s^X \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} \mathcal{A}_s^X)_m}, \quad (14.3.b)$$

so gilt für  $i = 0, \dots, m$ :

$$\sum_j b_{i,j} \cdot c_{m-i,j} = \binom{m}{i} a_m \quad (14.3.c)$$

*Beweis.* Aus dem zweiten Distributivgesetz 14.1.b erhalten wir das folgende kommutative Diagramm von  $\mathcal{O}_S$ -Kegelmangebren:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{O}_S[t] \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S[t] \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}^X & \xleftarrow{\Delta'_{\mathcal{A}^X}} & \mathcal{O}_S[t] \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}^X \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S[t] \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}^X & & \\
 \alpha_{\mathcal{O}_S[t] \otimes \text{id}_{\mathcal{A}^X}} \uparrow & & & & \uparrow \mu_{\mathcal{A}^X} \otimes \mu_{\mathcal{A}^X} \\
 \mathcal{O}_S[t] \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}^X & \xleftarrow{\mu_{\mathcal{A}^X}} \mathcal{A}^X & \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{A}^X}} & \mathcal{A}^X \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}^X & 
 \end{array}$$

Für die rechte Seite ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 & \Delta'_{\mathcal{A}^X,s} \circ (\mu_{\mathcal{A}^X,s} \otimes \mu_{\mathcal{A}^X,s}) \circ \alpha_{\mathcal{A}^X,s}(a_m) \\
 & \stackrel{(14.3.b)}{=} \Delta'_{\mathcal{A}^X,s} \circ \mu_{\mathcal{A}^X,s} \otimes \mu_{\mathcal{A}^X,s} \left( \sum_{i=0}^m \sum_j b_{i,j} \otimes c_{m-i,j} \right) \\
 & \stackrel{(10.2.a)}{=} \Delta'_{\mathcal{A}^X,s} \left( \sum_{i=0}^m \sum_j t^i \otimes b_{i,j} \otimes t^{m-i} \otimes c_{m-i,j} \right) \\
 & = \sum_{i=0}^m \sum_j t^i \otimes t^{m-i} \otimes b_{i,j} \cdot c_{m-i,j}
 \end{aligned}$$

Die linke Seite ergibt:

$$\begin{aligned}
 & \alpha_{\mathcal{O}_S[t],s} \otimes \text{id}_{\mathcal{A}^X,s} \circ \mu_{\mathcal{A}^X,s}(a_m) \stackrel{(10.2.a)}{=} \alpha_{\mathcal{O}_S[t],s} \otimes \text{id}_{\mathcal{A}^X,s}(t^m \otimes a_m) \\
 & \stackrel{(10.1.b)}{=} (t \otimes 1 + 1 \otimes t)^m \otimes a_m = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} t^i \otimes t^{m-i} \otimes a_m
 \end{aligned}$$

Durch Vergleich der Koeffizienten folgt somit die Aussage.  $\square$

KOROLLAR 14.3.2. Es sei  $X$  ein linearer Raum über  $S$  und  $s \in S$  gegeben. Bezeichne  $\alpha_{\mathcal{A}^X} : \mathcal{A}^X \rightarrow \mathcal{A}^X \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}^X$  den durch die Addition induzierten Morphismus von  $\mathcal{O}_S$ -Kegeralgebren, dann gilt für  $U \subset S$  offen und alle  $a_1 \in \mathcal{A}_1^X(U)$ :

$$\alpha_{\mathcal{A}^X}(a_1) = a_1 \otimes 1 + 1 \otimes a_1 \quad (14.3.d)$$

Beweis. Sei  $s \in U$  und  $\alpha_{\mathcal{A}^X, s}(a_{1,s})$  gegeben durch  $\sum_{i=0}^1 \sum_j b_{i,j} \otimes c_{1-i,j}$ . Dann ergibt sich folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathcal{A}^X, s}(a_{1,s}) &\stackrel{(14.3.b)}{=} \left( \sum_j b_{0,j} \otimes c_{1,j} \right) + \left( \sum_j b_{1,j} \otimes c_{0,j} \right) \\ &= \left( \sum_j 1 \otimes b_{0,j} \cdot c_{1,j} \right) + \left( \sum_j b_{1,j} \cdot c_{0,j} \otimes 1 \right) \\ &\stackrel{(14.3.c)}{=} 1 \otimes \underbrace{\left( \sum_j b_{0,j} \cdot c_{1,j} \right)}_{=a_{1,s}} + \underbrace{\left( \sum_j b_{1,j} \cdot c_{0,j} \right)}_{=a_{1,s}} \otimes 1 \quad \square \end{aligned}$$

KOROLLAR 14.3.3. Es sei  $X$  ein linearer Raum über  $S$  und  $m \geq 1$ . Bezeichne  $\Delta_m : \mathcal{A}_{m-1}^X \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}_1^X \rightarrow \mathcal{A}_m^X$  die kanonische Abbildung  $a_{m-1} \otimes a_1 \mapsto a_{m-1} \cdot a_1$  und  $\mathcal{E}_m$  die Komposition

$$\mathcal{A}_m^X \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{A}^X}} \bigoplus_{i=0}^m \mathcal{A}_i^X \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}_{m-i}^X \xrightarrow{p_{m-1}} \mathcal{A}_{m-1}^X \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}_1^X,$$

wobei die rechte Abbildung die Projektion auf den  $(m-1)$ -ten Summanden multipliziert mit  $\frac{1}{m}$  bezeichnet. Dann ist  $\Delta_m \circ \mathcal{E}_m = \text{id}_{\mathcal{A}_m^X}$ , und insbesondere gilt für  $m \geq 1$ :

$$\mathcal{A}_m^X = \text{im } \Delta_m = \mathcal{A}_{m-1}^X \cdot \mathcal{A}_1^X$$

Ist  $s \in S$  und  $a_1 \cdots a_m \in \mathcal{A}_{m,s}^X$  mit  $a_i \in \mathcal{A}_{1,s}^X$  und bezeichnet  $\tau_{i,j}$  die Transposition, welche  $i$  und  $j$  vertauscht, so gilt:

$$\mathcal{E}_{m,s}(a_1 \cdots a_m) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m a_{\tau_{i,m}(1)} \cdots a_{\tau_{i,m}(m-1)} \otimes a_{\tau_{i,m}(m)}$$

Beweis. Sei  $s \in S$ . Dann gilt für alle  $a_m \in \mathcal{A}_{m,s}^X$ :

$$\begin{aligned} \Delta_m \circ p_{m-1} \circ \alpha_{\mathcal{A}^X, s}(a_m) &\stackrel{(14.3.b)}{=} \Delta_m \circ p_{m-1} \left( \sum_{i=0}^m \sum_{j=1}^n b_{i,j} \otimes c_{m-i,j} \right) \\ &= \Delta_m \left( \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n b_{m-1,j} \otimes c_{1,j} \right) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n b_{m-1,j} \cdot c_{1,j} \\ &\stackrel{(14.3.c)}{=} \frac{1}{m} \binom{m}{m-1} a_m = a_m \end{aligned}$$

Für  $a_1 \cdots a_m \in \mathcal{A}_{m,s}^X$  mit  $a_i \in \mathcal{A}_{1,s}^X$  gilt:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{E}}_{m,s}(a_1 \cdots a_m) &= p_{m-1} \circ \alpha_{\mathcal{A}_{1,s}^X}(a_1 \cdots a_m) \\ &= p_{m-1} \left( \prod_{i=1}^m \alpha_{\mathcal{A}_{1,s}^X}(a_i) \right) \stackrel{(14.3.d)}{=} p_{m-1} \left( \prod_{i=1}^m (a_i \otimes 1 + 1 \otimes a_i) \right) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m a_{\tau_{i,m}(1)} \cdots a_{\tau_{i,m}(m-1)} \otimes a_{\tau_{i,m}(m)} \quad \square \end{aligned}$$

Nach Satz 4.1.5 ist  $\mathcal{A}_1^X$  ein kohärenter  $\mathcal{O}_S$ -Modul. Somit erhalten wir, indem wir  $\Lambda(T) = \mathcal{A}_1^T$  für lineare Räume  $T$  über  $S$  und  $\Lambda(f) = \check{f}_1$  für Morphismen  $f: T \rightarrow T'$  von linearen Räumen über  $S$  setzen, einen kontravarianten Funktor von der Kategorie der linearen Räume über  $S$  in die Kategorie der kohärenten  $\mathcal{O}_S$ -Moduln.

**SATZ 14.3.4.** *Es sei  $X$  ein linearer Raum über  $S$ . Dann ist durch den  $\mathcal{O}_S$ -Algebromorphismus*

$$\psi: \begin{cases} \mathbf{S}(\mathcal{A}_1^X) & \longrightarrow \mathcal{A}^X \\ a_1 * \cdots * a_m & \mapsto a_1 \cdots a_m \end{cases}$$

*ein natürlicher Isomorphismus von  $\mathcal{O}_S$ -Kegeralgebren definiert, wobei  $\mathbf{S}(\mathcal{A}_1^X)$  die symmetrische Algebra von  $\mathcal{A}_1^X$  bezeichnet.*

*Beweis.* Aus Korollar 14.3.3 folgt, dass  $\psi$  graduiert und surjektiv ist. Wir zeigen, dass  $\psi$  zusätzlich injektiv ist. Sei dazu  $s \in S$  und

$$J = \bigoplus_{m \geq 0} J_m := \ker \psi_s.$$

Dann gilt  $J_0 = J_1 = 0$ . Nehmen wir also an, dass  $J_{m-1} = 0$  ist. Bezeichnet  $\tau_{i,j}$  die Transposition, welche  $i$  und  $j$  vertauscht, und  $\mathfrak{S}_m$  die Symmetrische Gruppe der Ordnung  $m$ , dann sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} p: \begin{cases} \mathbf{S}^m(\mathcal{A}_{1,s}^X) & \longrightarrow \mathbf{S}^{m-1}(\mathcal{A}_{1,s}^X) \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} \mathcal{A}_{1,s}^X \\ a_1 * \cdots * a_m & \mapsto \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m a_{\tau_{i,m}(1)} * \cdots * a_{\tau_{i,m}(m-1)} \otimes a_{\tau_{i,m}(m)} \end{cases} \\ q: \begin{cases} \mathbf{S}^{m-1}(\mathcal{A}_{1,s}^X) \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} \mathcal{A}_{1,s}^X & \longrightarrow \mathbf{S}^m(\mathcal{A}_{1,s}^X) \\ a_1 * \cdots * a_{m-1} \otimes a_m & \mapsto \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} a_{\sigma(1)} * \cdots * a_{\sigma(m)} \end{cases} \end{aligned}$$

wohldefiniert, und wir erhalten das folgende kommutative Diagramm (vgl. Korollar 14.3.3):

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{id} & & \\ & \searrow & \text{---} & \swarrow & \\ \mathbf{S}^m(\mathcal{A}_{1,s}^X) & \xrightarrow{p} & \mathbf{S}^{m-1}(\mathcal{A}_{1,s}^X) \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} \mathcal{A}_{1,s}^X & \xrightarrow{q} & \mathbf{S}^m(\mathcal{A}_{1,s}^X) \\ \psi_{m,s} \downarrow & & \downarrow \psi_{m-1,s} \otimes \text{id} & & \downarrow \psi_{m,s} \\ \mathcal{A}_{m,s}^X & \xrightarrow{\bar{\mathcal{E}}_m} & \mathcal{A}_{m-1,s}^X \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} \mathcal{A}_{1,s}^X & \xrightarrow{\Delta_m} & \mathcal{A}_{m,s}^X \\ & \swarrow & \text{---} & \searrow & \\ & & \text{id} & & \end{array}$$

Bezeichnet  $\iota: J_{m-1} \hookrightarrow \mathcal{A}_{m-1,s}^X$  die kanonische Inklusion, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} J_m &= q \circ p(J_m) \subset q(\ker \psi_{m-1,s} \otimes \text{id}) = q(\text{im } \iota \otimes \text{id}) \\ &= q(\iota \otimes \text{id}(J_{m-1} \otimes \mathcal{A}_{1,s}^X)) = 0 \end{aligned}$$

Es bleibt die Natürlichkeit der Isomorphie zu zeigen. Dazu ist für Morphismen  $f: T \rightarrow T'$  von linearen Räumen über  $S$  die Kommutativität des folgenden Diagrammes nachzuweisen:

$$\begin{array}{ccc} S(\mathcal{A}_1^T) & \xrightarrow{\psi_T} & \mathcal{A}^T \\ \uparrow S \circ \Delta(f) = S(\check{f}_1) & & \uparrow \Psi(f) = \check{f} \\ S(\mathcal{A}_1^{T'}) & \xrightarrow{\psi_{T'}} & \mathcal{A}^{T'} \end{array}$$

Für homogene Elemente vom Grad  $\leq 1$  ist das Diagramm trivialerweise kommutativ. Da sich homogene Elemente vom Grad  $\geq 2$  eindeutig als Summe von Produkten von homogenen Elementen vom Grad 1 darstellen lassen, folgt die Kommutativität des Diagrammes.  $\square$

**KOROLLAR 14.3.5.** *Es sei  $X$  ein linearer Raum über  $S$ . Dann ist der durch die Addition induzierte Morphismus von  $\mathcal{O}_S$ -Kegeralgebren gegeben durch:*

$$\alpha_{\mathcal{A}^X}: \begin{cases} \mathcal{A}^X & \longrightarrow \mathcal{A}^X \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}^X \\ a_1 \cdots a_m & \mapsto \prod_{i=1}^m (a_i \otimes 1 + 1 \otimes a_i) \end{cases}$$

**KOROLLAR 14.3.6.** *Es sei  $X$  ein linearer Raum über  $S$ . Dann ist  $\mathcal{A}^X$  zusammen mit  $\alpha_{\mathcal{A}^X}: \mathcal{A}^X \rightarrow \mathcal{A}^X \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}^X$  als Koaddition und  $e_{\mathcal{A}^X}: \mathcal{A}^X \rightarrow \mathcal{O}_S$  als Koeinheit eine bikommutative graduierte  $\mathcal{O}_S$ -Bigebra, und  $\psi: S(\mathcal{A}_1^X) \rightarrow \mathcal{A}^X$  ist ein Morphismus von bikommutativen graduierten  $\mathcal{O}_S$ -Bigebr.*

**14.4. Der assoziierte lineare Raum eines  $\mathcal{O}_S$ -Modul.** Sei  $S$  ein komplexer Raum und  $\mathcal{E}$  ein kohärenter  $\mathcal{O}_S$ -Modul. Dann ist die symmetrische Algebra  $S(\mathcal{E})$  von  $\mathcal{E}$  nach Satz 4.1.4 eine  $\mathcal{O}_S$ -Kegeralgebra. Wir definieren Abbildungen wie folgt:

$$\alpha_{S(\mathcal{E})}: \begin{cases} S(\mathcal{E}) & \longrightarrow S(\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{O}_S} S(\mathcal{E}) \\ a_1 * \cdots * a_m & \mapsto \prod_{i=1}^m (a_i \otimes 1 + 1 \otimes a_i) \end{cases} \quad (14.4.a)$$

$$\mu_{S(\mathcal{E})}: \begin{cases} S(\mathcal{E}) & \longrightarrow \mathcal{O}_S[t] \otimes_{\mathcal{O}_S} S(\mathcal{E}) \\ a_1 * \cdots * a_m & \mapsto t^m \otimes a_1 * \cdots * a_m \end{cases} \quad (14.4.b)$$

$$e_{S(\mathcal{E})}: \begin{cases} S(\mathcal{E}) & \longrightarrow \mathcal{O}_S \\ a_1 * \cdots * a_m & \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } m = 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases} \quad (14.4.c)$$

Die Abbildungen  $\alpha_{S(\mathcal{E})}$  und  $e_{S(\mathcal{E})}$  sind die kanonische Komultiplikation und die kanonische Koeinheit, welche auf  $S(\mathcal{E})$  die Struktur einer bikommutativen graduierten  $\mathcal{O}_S$ -Bigebra definieren [BA, III, § 11.4, Examples (2), S. 586].

**SATZ 14.4.1.** *Es sei  $\mathcal{E}$  ein kohärenter  $\mathcal{O}_S$ -Modul. Dann ist  $(X, \pi_X) := \text{Specan}(S(\mathcal{E}))$  zusammen mit den Abbildungen  $\alpha_X := \text{Specan}(\alpha_{S(\mathcal{E})}): X \times_S X \rightarrow X$  als Addition,  $\mu_X := \text{Specan}(\mu_{S(\mathcal{E})}): (\mathbb{C} \times S) \times_S X \rightarrow X$  als Multiplikation und  $e_X := \text{Specan}(e_{S(\mathcal{E})}): S \rightarrow X$  als Einheit ein linearer Raum über  $S$ .*

*Beweis.* Sei  $\iota_{\mathcal{S}(\mathcal{E})} := \tilde{\mu}_{\mathcal{S}(\mathcal{E})}^{(-1)}$ , dann gilt (vgl. (10.4.a)):

$$\iota_{\mathcal{S}(\mathcal{E})}: \begin{cases} \mathcal{S}(\mathcal{E}) & \longrightarrow \mathcal{S}(\mathcal{E}) \\ a_1 * \cdots * a_m & \longmapsto (-1)^m \cdot a_1 * \cdots * a_m \end{cases}$$

Da die Diagramme (13.3.a) - (13.3.d) kommutativ sind, definieren die Abbildungen  $\alpha_{\mathcal{S}(\mathcal{E})}$ ,  $\iota_{\mathcal{S}(\mathcal{E})}$  und  $e_{\mathcal{S}(\mathcal{E})}$  die Struktur einer bikommutativen  $\mathcal{O}_S$ -Bigeбра auf  $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ . Nach Satz 13.3.1 ist  $X$  zusammen mit  $\alpha_X$  als Addition,

$$\mu_X^{(-1)} \stackrel{10.4}{=} \text{Specan}(\mu_{\mathcal{S}(\mathcal{E})}^{(-1)}) = \text{Specan}(\iota_{\mathcal{S}(\mathcal{E})})$$

als Inversion und  $e_X$  als Einheit eine abelsche komplex analytische Gruppe über  $S$  und nach Satz 10.2.1 zusammen mit  $\mu_X$  als Multiplikation und  $e_X$  als Spitze ein komplex analytischer Kegel über  $S$ . Gemäß Satz 14.1.1 bleibt somit zu zeigen, dass Gruppen- und Kegelstruktur distributiv verträglich sind. Betrachten wir dazu die beiden folgenden Diagramme:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_S[t] \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{S}(\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{S}(\mathcal{E}) & \xleftarrow{\Delta'_{\mathcal{O}_S[t]}} & \mathcal{O}_S[t] \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{S}(\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S[t] \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{S}(\mathcal{E}) \\ \uparrow \text{id}_{\mathcal{O}_S[t]} \otimes \alpha_{\mathcal{S}(\mathcal{E})} & & \uparrow \mu_{\mathcal{S}(\mathcal{E})} \otimes \mu_{\mathcal{S}(\mathcal{E})} \\ \mathcal{O}_S[t] \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{S}(\mathcal{E}) & \xleftarrow{\mu_{\mathcal{S}(\mathcal{E})}} \mathcal{S}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{S}(\mathcal{E})}} & \mathcal{S}(\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{S}(\mathcal{E}) \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_S[t] \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S[t] \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{S}(\mathcal{E}) & \xleftarrow{\Delta'_{\mathcal{S}(\mathcal{E})}} & \mathcal{O}_S[t] \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{S}(\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S[t] \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{S}(\mathcal{E}) \\ \uparrow \alpha_{\mathcal{O}_S[t]} \otimes \text{id}_{\mathcal{S}(\mathcal{E})} & & \uparrow \mu_{\mathcal{S}(\mathcal{E})} \otimes \mu_{\mathcal{S}(\mathcal{E})} \\ \mathcal{O}_S[t] \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{S}(\mathcal{E}) & \xleftarrow{\mu_{\mathcal{S}(\mathcal{E})}} \mathcal{S}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{S}(\mathcal{E})}} & \mathcal{S}(\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{S}(\mathcal{E}) \end{array}$$

Um die Kommutativität der Diagramme zu zeigen, reicht es, homogene Elemente vom Grad 1 zu betrachten [BA, III, § 6.1, Proposition 2, S. 497]. Sei also  $s \in S$  und  $a_1 \in S^1(\mathcal{E})$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} & \Delta'_{\mathcal{O}_S[t],s} \circ \mu_{\mathcal{S}(\mathcal{E}),s} \otimes \mu_{\mathcal{S}(\mathcal{E}),s} \circ \alpha_{\mathcal{S}(\mathcal{E}),s}(a_1) \\ &= \Delta'_{\mathcal{O}_S[t],s} \circ \mu_{\mathcal{S}(\mathcal{E}),s} \otimes \mu_{\mathcal{S}(\mathcal{E}),s}(a_1 \otimes 1 + 1 \otimes a_1) \\ &= \Delta'_{\mathcal{O}_S[t],s}(t \otimes a_1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes t \otimes a_1) \\ &= t \otimes a_1 \otimes 1 + t \otimes 1 \otimes a_1 = t \otimes (a_1 \otimes 1 + 1 \otimes a_1) \\ &= \text{id}_{\mathcal{O}_S[t],s} \otimes \alpha_{\mathcal{S}(\mathcal{E}),s}(t \otimes a_1) = \text{id}_{\mathcal{O}_S[t],s} \otimes \alpha_{\mathcal{S}(\mathcal{E}),s} \circ \mu_{\mathcal{S}(\mathcal{E}),s}(a_1) \\ & \Delta'_{\mathcal{S}(\mathcal{E}),s} \circ \mu_{\mathcal{S}(\mathcal{E}),s} \otimes \mu_{\mathcal{S}(\mathcal{E}),s} \circ \alpha_{\mathcal{S}(\mathcal{E}),s}(a_1) \\ &= \Delta'_{\mathcal{S}(\mathcal{E}),s}(t \otimes a_1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes t \otimes a_1) \\ &= (t \otimes 1 \otimes a_1 + 1 \otimes t \otimes a_1) = (t \otimes 1 + 1 \otimes t) \otimes a_1 \\ &= \alpha_{\mathcal{O}_S[t],s} \otimes \text{id}_{\mathcal{S}(\mathcal{E}),s}(t \otimes a_1) = \alpha_{\mathcal{O}_S[t],s} \otimes \text{id}_{\mathcal{S}(\mathcal{E}),s} \circ \mu_{\mathcal{S}(\mathcal{E}),s}(a_1) \end{aligned}$$

Mit Satz 6.1.1 folgt nun die Kommutativität der Diagramme (14.1.a) und (14.1.b).  $\square$

**KOROLLAR 14.4.2.** *Es sei  $X$  ein linearer Raum über  $S$ . Dann ist  $Z := \text{Specan}(\mathcal{A}^X)$  zusammen mit den Abbildungen  $\alpha_Z := \text{Specan}(\alpha_{\mathcal{A}^X}) : Z \times_S Z \rightarrow Z$  als Addition,  $\mu_Z := \text{Specan}(\mu_{\mathcal{A}^X}) : (\mathbb{C} \times S) \times_S Z \rightarrow Z$  als Multiplikation und  $e_Z = \text{Specan}(e_{\mathcal{A}^X}) : S \rightarrow Z$  als Einheit ein linearer Raum über  $S$ , und die Abbildung  $\text{Specan}(\psi) : Z \xrightarrow{\sim} \text{Specan}(S(\mathcal{A}_1^X))$  ist ein natürlicher Isomorphismus von linearen Räumen über  $S$ .*

SATZ 14.4.3. *Es sei  $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$  ein Morphismus von kohärenten  $\mathcal{O}_S$ -Moduln. Dann ist  $\text{Specan}(\mathbf{S}(\varphi)): \text{Specan}(\mathbf{S}(\mathcal{E})) \rightarrow \text{Specan}(\mathbf{S}(\mathcal{F}))$  ein Morphismus von linearen Räumen über  $S$ .*

*Beweis.* Anhand der Definitionen (14.4.a) und (14.4.b) von  $\alpha_{\mathbf{S}(\mathcal{E})}$  und  $\mu_{\mathbf{S}(\mathcal{E})}$  sehen wir, dass die beiden folgenden Diagramme kommutativ sind:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{S}(\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathbf{S}(\mathcal{E}) & \xleftarrow{\alpha_{\mathbf{S}(\mathcal{E})}} & \mathbf{S}(\mathcal{E}) \\ \mathbf{S}(\varphi) \otimes \mathbf{S}(\varphi) \uparrow & & \uparrow \mathbf{S}(\varphi) \\ \mathbf{S}(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathbf{S}(\mathcal{F}) & \xleftarrow{\alpha_{\mathbf{S}(\mathcal{F})}} & \mathbf{S}(\mathcal{F}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_S[t] \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathbf{S}(\mathcal{E}) & \xleftarrow{\mu_{\mathbf{S}(\mathcal{E})}} & \mathbf{S}(\mathcal{E}) \\ \text{id} \otimes \mathbf{S}(\varphi) \uparrow & & \uparrow \mathbf{S}(\varphi) \\ \mathcal{O}_S[t] \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathbf{S}(\mathcal{F}) & \xleftarrow{\mu_{\mathbf{S}(\mathcal{F})}} & \mathbf{S}(\mathcal{F}) \end{array}$$

Mit Satz 6.1.1 folgt nun die Kommutativität der Diagramme (14.1.a) und (14.1.b).  $\square$

Wir erhalten folglich, indem wir  $V(\mathcal{E}) = \text{Specan}(\mathbf{S}(\mathcal{E}))$  für kohärente  $\mathcal{O}_S$ -Moduln  $\mathcal{E}$  und  $V(\varphi) = \text{Specan}(\mathbf{S}(\varphi)): \text{Specan}(\mathbf{S}(\mathcal{E}')) \rightarrow \text{Specan}(\mathbf{S}(\mathcal{E}))$  für Morphismen  $\varphi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$  von kohärenten  $\mathcal{O}_S$ -Moduln setzen, einen kontravarianten Funktor von der Kategorie der kohärenten  $\mathcal{O}_S$ -Moduln in die Kategorie der linearen Räume über  $S$ .

**14.5. Das Fischer-Prill Theorem.** Sei  $(X, \pi_X)$  ein linearer Raum über  $S$ . Für  $U \subset S$  offen bezeichne  $X|_U$  den komplexen Unterraum  $(\pi_X^{-1}(U), \mathcal{O}_{X|\pi_X^{-1}(U)})$ . Wir setzen für  $U \subset S$  offen:

$$\mathcal{L}^X(U) := \left\{ f \in \text{Hom}_U(X|_U, \mathbb{C} \times U) : f \text{ linear} \right\}$$

Dann definiert  $U \mapsto \mathcal{L}^X(U)$  zusammen mit den kanonischen Restriktionsabbildungen eine Prägarbe  $\mathcal{L}^X$  von Mengen auf  $S$ . Wir nennen  $\mathcal{L}^X$  die *Garbe der Linearformen von  $X$* . Diese Bezeichnung wird gerechtfertigt durch den nächsten Satz:

SATZ 14.5.1. *Es sei  $(X, \pi_X)$  ein linearer Raum. Dann induziert der funktorielle Isomorphismus  $\beta_{\Gamma,1/S}: \mathbf{h}_{\mathbb{C} \times S} \xrightarrow{\sim} \mathbf{F}_{\Gamma,1/S}$  eine Bijektion*

$$\mathcal{L}^X \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_1^X,$$

welche die Struktur eines kohärenten  $\mathcal{O}_S$ -Modul auf  $\mathcal{L}^X$  induziert. Sind  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}^X(U)$ , so ist die Addition gegeben durch:

$$\varphi_1 + \varphi_2 := \alpha_{\mathbb{C} \times U} \circ \varphi_1 \times \varphi_2 \circ \Delta_{X|_U}$$

Ist  $\varphi \in \mathcal{L}^X(U)$ ,  $\lambda \in \mathcal{O}_S(U)$ , und bezeichnet  $\ell: U \rightarrow \mathbb{C} \times U$  die durch  $\lambda$  induzierte Abbildung, so ist die Multiplikation gegeben durch:

$$\lambda \cdot \varphi := \mu_{\mathbb{C} \times U} \circ (\ell \circ \pi_{X|_U} \times \varphi) \circ \Delta_{X|_U}$$

*Beweis.* Sei  $U \subset S$  offen und  $\varphi \in \text{Hom}_U(X|_U, \mathbb{C} \times U)$ . Aufgrund von (3.4.b) ist das Diagramm (14.2.b) genau dann für  $\varphi$  kommutativ, wenn

$$\widetilde{\varphi \circ \mu_{X|_U}}(\mathfrak{z}) = \widetilde{\mu_{\mathbb{C} \times U} \circ (\text{id}_{X|_U} \times \varphi)}(\mathfrak{z})$$

ist. Nun gilt für  $a := [\beta_{\Gamma,1/S}(X|_U)](\varphi) = \tilde{\varphi}(\mathfrak{z})$  einerseits

$$\widetilde{\varphi \circ \mu_{X|_U}}(\mathfrak{z}) = \tilde{\mu}_{X|_U} \circ \tilde{\varphi}(\mathfrak{z}) = \tilde{\mu}_{X|_U}(a),$$

und andererseits

$$\begin{aligned}\widetilde{\mu_{\mathbb{C} \times U} \circ (\text{id}_{X|U} \times \varphi)}(\mathfrak{z}) &= \widetilde{\text{id}_{X|U} \times \varphi \circ \tilde{\mu}_{\mathbb{C} \times U}(\mathfrak{z})} \stackrel{(10.1.a)}{=} \widetilde{\text{id}_{X|U} \times \varphi(\mathfrak{z} \otimes \mathfrak{z})} \\ &= \mathfrak{z} \otimes \tilde{\varphi}(\mathfrak{z}) = \mathfrak{z} \otimes a.\end{aligned}$$

Wir sehen somit, dass das Diagramm (14.2.b) genau dann kommutativ ist, wenn  $\tilde{\mu}_{X|U}(a) = \mathfrak{z} \otimes a$ , das heißt wenn  $a \in \mathcal{A}_1^X(U)$  ist. Sei nun  $a \in \mathcal{A}_1^X(U)$  und  $\varphi := [\beta_{\Gamma,1/S}^{-1}(X|U)](a)$  die durch  $a$  induzierte Abbildung. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\widetilde{\alpha_{\mathbb{C} \times U} \circ (\varphi \times \varphi)}(\mathfrak{z}) &= \widetilde{\varphi \times \varphi \circ \tilde{\alpha}_{\mathbb{C} \times U}(\mathfrak{z})} \stackrel{(10.1.b)}{=} \widetilde{\varphi \times \varphi(\mathfrak{z} \otimes 1 + 1 \otimes \mathfrak{z})} \\ &= \tilde{\varphi}(\mathfrak{z}) \otimes 1 + 1 \otimes \tilde{\varphi}(\mathfrak{z}) = a \otimes 1 + 1 \otimes a \stackrel{(14.3.d)}{=} \tilde{\alpha}_{X|U}(a) \\ &= \tilde{\alpha}_{X|U} \circ \tilde{\varphi}(\mathfrak{z}) = \widetilde{\varphi \circ \alpha_{X|U}}(\mathfrak{z})\end{aligned}$$

Mit (3.4.b) folgt, dass das Diagramm (14.2.a) kommutativ ist, und somit  $\varphi$  ein Morphismus von linearen Räumen über  $S$  ist.

Es bleibt somit zu zeigen, dass die durch den funktoriellen Isomorphismus  $\mathcal{L}^X \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_1^X$  induzierte  $\mathcal{O}_S$ -Modulstruktur mit der oben angegebenen übereinstimmt:

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi_1 + \varphi_2}(\mathfrak{z}) &= \widetilde{\alpha_{\mathbb{C} \times U} \circ (\varphi_1 \times \varphi_2) \circ \Delta_{X|U}}(\mathfrak{z}) \\ &= \tilde{\Delta}_{X|U} \circ \widetilde{\varphi_1 \times \varphi_2 \circ \tilde{\alpha}_{\mathbb{C} \times U}(\mathfrak{z})} \stackrel{(10.1.b)}{=} \tilde{\Delta}_{X|U} \circ \widetilde{\varphi_1 \times \varphi_2(\mathfrak{z} \otimes 1 + 1 \otimes \mathfrak{z})} \\ &= \tilde{\Delta}_{X|U}(\varphi_1(\mathfrak{z}) \otimes 1 + 1 \otimes \varphi_2(\mathfrak{z})) = \tilde{\Delta}_{X|U}(a_1 \otimes 1 + 1 \otimes a_2) \\ &= a_1 + a_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\lambda \cdot \varphi}(\mathfrak{z}) &= \widetilde{\mu_{\mathbb{C} \times U} \circ (\ell \circ \pi_{X|U} \times \varphi) \circ \Delta_{X|U}}(\mathfrak{z}) \\ &= \tilde{\Delta}_{X|U} \circ \widetilde{\ell \circ \pi_{X|U} \times \varphi \circ \tilde{\mu}_{\mathbb{C} \times U}(\mathfrak{z})} \stackrel{(10.1.a)}{=} \tilde{\Delta}_{X|U} \circ \widetilde{\ell \circ \pi_{X|U} \times \varphi(\mathfrak{z} \otimes \mathfrak{z})} \\ &= \tilde{\Delta}_{X|U}(\tilde{\pi}_{X|U} \circ \tilde{\ell}(\mathfrak{z}) \otimes \tilde{\varphi}(\mathfrak{z})) = \tilde{\Delta}_{X|U}(\tilde{\pi}_{X|U}(\lambda) \otimes a) \\ &= \tilde{\pi}_{X|U}(\lambda) \cdot a \stackrel{\text{def.}}{=} \lambda \cdot a\end{aligned} \quad \square$$

Insbesondere erhalten wir einen kontravarianten Funktor von der Kategorie der linearen Räume über  $S$  in die Kategorie der kohärenten  $\mathcal{O}_S$ -Moduln, indem wir  $L(T) = \mathcal{L}^T$  für lineare Räume  $T$  über  $S$  setzen und  $L(f): \mathcal{L}^{T'} \rightarrow \mathcal{L}^T$  für Morphismen  $f: T \rightarrow T'$  von linearen Räumen über  $S$  wie folgt definieren:

$$L(f)_U: \begin{cases} \mathcal{L}^{T'}(U) & \longrightarrow & \mathcal{L}^T(U) \\ \phi & \longmapsto & \phi \circ f|_U \end{cases} \quad U \subset S \text{ offen,} \quad (14.5.a)$$

**KOROLLAR 14.5.2.** *Sei  $X$  ein linearer Raum über  $S$ . Dann sind die Funktoren  $L$  und  $\Lambda$  isomorph.*

*Beweis.* Nach Satz 14.5.1 ist  $L(T) \simeq \Lambda(T)$  für komplexe Räume  $T$  über  $S$ . Es bleibt somit die Natürlichkeit der Isomorphie zu zeigen. Das heißt, für  $U \subset S$  offen ist die Kommutativität des folgenden Diagrammes nachzuweisen:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}^T(U) & \xrightarrow{\beta_{\Gamma,1/U}(T)} & \mathcal{A}_1^T(U) \\ \uparrow L(f)_U & & \uparrow \Lambda(f)_U = \check{f}_{1,U} \\ \mathcal{L}^{T'}(U) & \xrightarrow{\beta_{\Gamma,1/U}(T')} & \mathcal{A}_1^{T'}(U) \end{array}$$

Sei also  $\phi \in \mathcal{L}^{T'}(U)$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} & \beta_{\Gamma,1/U}(T) \circ L(f)_U(\phi) \stackrel{(14.5.a)}{=} [\beta_{\Gamma,1/U}(T)](\phi \circ f|_U) \stackrel{(3.4.b)}{=} \widetilde{\phi \circ f|_U}(\mathfrak{z}) \\ & = \widetilde{f|_U} \circ \widetilde{\phi}(\mathfrak{z}) = \widetilde{f}_{\pi_T^{-1}(U)}(\widetilde{\phi}(\mathfrak{z})) \stackrel{(11.3.a)}{=} \check{f}_U(\widetilde{\phi}(\mathfrak{z})) = \check{f}_{1,U}(\widetilde{\phi}(\mathfrak{z})) \\ & \stackrel{(3.4.b)}{=} \check{f}_{1,U} \circ [\beta_{\Gamma,1/U}(T')](\phi) \quad \square \end{aligned}$$

**THEOREM 14.5.3 (Fischer-Prill).** *Es sei  $S$  ein komplexer Raum. Der Funktor  $V: \mathcal{E} \rightsquigarrow \text{Specan}(S(\mathcal{E}))$  von der Kategorie der kohärenten  $\mathcal{O}_S$ -Moduln in die Kategorie der linearen Räume über  $S$  ist eine Antiäquivalenz von Kategorien. Quasi-Inverse zu  $V$  sind gegeben durch die Funktoren  $L: X \rightsquigarrow \mathcal{L}^X$  und  $\Lambda: X \rightsquigarrow \mathcal{A}_1^X$ .*

*Beweis.* Sei  $\mathcal{E}$  ein kohärenter  $\mathcal{O}_S$ -Modul. Dann ist  $X := V(\mathcal{E})$  nach Satz 14.4.1 ein linearer Raum über  $S$ . Gemäß Satz 12.2.1 haben wir einen natürlichen Isomorphismus von  $\mathcal{O}_S$ -Kegeralgebren  $\check{\xi}_X: S(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_1^X$ . Durch Restriktion auf die homogenen Elemente vom Grad 1 erhalten wir einen Isomorphismus von  $\mathcal{O}_S$ -Moduln wie folgt:

$$\mathcal{E} = S^1(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_1^X = \Lambda(V(\mathcal{E}))$$

Dieser ist natürlich in  $\mathcal{E}$  und induziert einen funktoriellen Isomorphismus zwischen dem Identitätsfunktor der Kategorie der kohärenten  $\mathcal{O}_S$ -Moduln und dem Funktor  $\Lambda \circ V$ , denn für Morphismen  $\varphi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$  von kohärenten  $\mathcal{O}_S$ -Moduln folgt aus der Kommutativität von (12.2.d) die Kommutativität des folgenden Diagrammes:

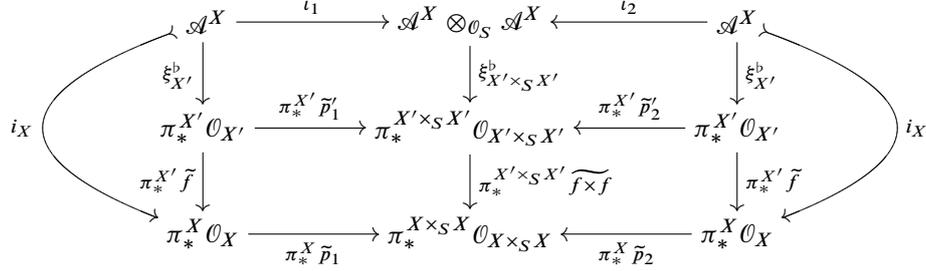
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} = S^1(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\check{\xi}_{X,1}} & S^1(\mathcal{A}_1^X) = \mathcal{A}_1^X = \Lambda \circ V(\mathcal{E}) \\ \varphi = S^1(\varphi) \downarrow & & \downarrow \Lambda \circ V(\varphi) = \check{f}_1 \\ \mathcal{E}' = S^1(\mathcal{E}') & \xrightarrow{\check{\xi}_{X',1}} & S^1(\mathcal{A}_1^{X'}) = \mathcal{A}_1^{X'} = \Lambda \circ V(\mathcal{E}') \end{array}$$

Dabei bezeichnen  $X := V(\mathcal{E})$  und  $X' := V(\mathcal{E}')$  die assoziierten linearen Räume über  $S$  und  $f := V(\varphi)$  die zu  $\varphi$  assoziierte Abbildung.

Sei umgekehrt  $(X, \pi_X)$  ein linearer Raum über  $S$  mit Addition  $\alpha_X$  und  $(X', \pi_{X'}) := \text{Specan}(\mathcal{A}^{X'})$ . Nach Korollar 14.4.2 ist  $X'$  ein linearer Raum über  $S$ , wobei die Addition gegeben ist durch  $\alpha_{X'} := \text{Specan}(\alpha_{\mathcal{A}^{X'}})$ . Gemäß Satz 12.3.1 haben wir einen Isomorphismus  $f: X \xrightarrow{\sim} X'$  von komplex analytischen Kegeln über  $S$ . Wir zeigen, dass  $f$  linear ist. Das bedeutet, es ist für alle komplexen Räume  $T$  über  $S$  die Kommutativität des oberen Rechtecks in dem folgenden Diagramm nachzuweisen:

$$\begin{array}{ccc} h_{X \times_S X}(T) & \xrightarrow{h_{\alpha_X}(T)} & h_X(T) \\ h_{f \times_S f}(T) \downarrow & & \downarrow h_f(T) \\ h_{X' \times_S X'}(T) & \xrightarrow{h_{\alpha_{X'}}(T)} & h_{X'}(T) \\ \gamma_{\mathcal{A}^{X'} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}^{X'}}(T) \downarrow \wr & & \wr \downarrow \gamma_{\mathcal{A}^{X'}}(T) \\ G_{\mathcal{A}^{X'} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}^{X'}}(T) & \xrightarrow{G_{\alpha_{\mathcal{A}^{X'}}}} & G_{\mathcal{A}^{X'}}(T) \end{array}$$

Wir zeigen dazu die Kommutativität des äußeren Rechtecks. Betrachten wir jedoch zunächst das folgende kommutative Diagramm:



Anhand von (12.5.a) folgt somit:

$$\pi_*^{X' \times_S X'} \widetilde{f \times_S f} \circ \xi_{X' \times_S X'}^b = \xi_{X \times_S X}^b \quad (14.5.b)$$

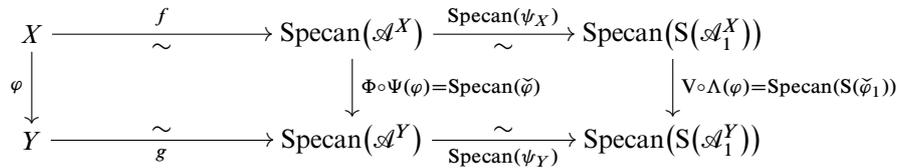
Sei nun  $\phi \in h_{X \times_S X}(T)$ , dann ergibt sich die folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
 [G_{\alpha_{\mathcal{A}^X}} \circ \gamma_{\mathcal{A}^X \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}^X} \circ h_{f \times f}(T)](\phi) &= [G_{\alpha_{\mathcal{A}^X}} \circ \gamma_{\mathcal{A}^X \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}^X}(T)]((f \times_S f) \circ \phi) \\
 &\stackrel{(4.4.b)}{=} [G_{\alpha_{\mathcal{A}^X}}(T)](\pi_*^{X' \times_S X'} \widetilde{(f \times_S f)} \circ \phi \circ \xi_{X' \times_S X'}^b) \\
 &\stackrel{(5.3.a)}{=} \pi_*^{X' \times_S X'} \widetilde{(f \times_S f)} \circ \phi \circ \xi_{X' \times_S X'}^b \circ \alpha_{\mathcal{A}^X} \\
 &= \pi_*^{X \times_S X} \tilde{\phi} \circ \pi_*^{X' \times_S X'} \widetilde{f \times_S f} \circ \xi_{X' \times_S X'}^b \circ \alpha_{\mathcal{A}^X} \\
 &\stackrel{(14.5.b)}{=} \pi_*^{X \times_S X} \tilde{\phi} \circ \xi_{X \times_S X}^b \circ \alpha_{\mathcal{A}^X} \stackrel{(14.3.a)}{=} \pi_*^{X \times_S X} \tilde{\phi} \circ \pi_*^X \tilde{\alpha}_X \circ i_X \\
 &\stackrel{(12.3.a)}{=} \pi_*^{X \times_S X} \tilde{\phi} \circ \pi_*^X \tilde{\alpha}_X \circ \pi_*^{X'} \tilde{f} \circ \xi_X^b = \pi_*^{X'} \widetilde{f \circ \alpha_X} \circ \phi \circ \xi_{X'}^b \\
 &= [\gamma_{\mathcal{A}^X}(T)](f \circ \alpha_X \circ \phi) = [\gamma_{\mathcal{A}^X} \circ h_f \circ h_{\alpha_X}(T)](\phi)
 \end{aligned}$$

Die Abbildung  $f$  ist somit ein natürlicher Morphismus von linearen Räumen über  $S$ , und daher ist die Komposition

$$\text{Specan}(\psi) \circ f: X \xrightarrow{\sim} \text{Specan}(S(\mathcal{A}_1^X)) = V \circ \Lambda(X)$$

nach Korollar 14.4.2 ebenfalls ein natürlicher Isomorphismus von linearen Räumen über  $S$ . Die Natürlichkeit der Isomorphie bedeutet dabei, dass für alle Morphismen  $\varphi: X \rightarrow Y$  von linearen Räumen über  $S$  das folgende Diagramm kommutativ ist.



Wir sehen somit, dass der Identitätsfunctor in der Kategorie der linearen Räume über  $S$  isomorph zum Funktor  $V \circ \Lambda$  ist.  $\square$

**14.6. Triviale lineare Räume und Darstellbarkeit.** Der  $\mathbb{C}^n$  ist zusammen mit Addition und Multiplikation der kanonischen Vektorraumstruktur und dem Nullschnitt  $e_{\mathbb{C}^n}: \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^n$  als Einheit ein linearer Raum über dem reduzierten Nullpunkt  $(\{0\}, \mathbb{C})$ . Ist  $S$  ein komplexer Raum, so erhalten wir durch Basiswechsel einen linearen Raum  $\mathbb{C}^n \times S$  über  $S$  mit Addition  $\alpha_{\mathbb{C}^n \times S} := \alpha_{\mathbb{C}^n} \times \text{id}_S$ , Multiplikation  $\mu_{\mathbb{C}^n \times S} := \mu_{\mathbb{C}^n} \times \text{id}_S$  und Einheit  $e_{\mathbb{C}^n \times S} := e_{\mathbb{C}^n} \times \text{id}_S$ , welchen wir als den *trivialen  $n$ -dimensionalen linearen Raum über  $S$*  bezeichnen.

SATZ 14.6.1. *Ein linearer Raum  $X$  über  $S$  ist genau dann isomorph zum trivialen  $n$ -dimensionalen linearen Raum über  $S$ , wenn  $\mathcal{A}_1^X \simeq \mathcal{O}_S^n$  ist.*

*Beweis.* Nach Satz 14.5.3 reicht es, eine Richtung zu zeigen. Sei also  $X = \mathbb{C}^n \times S$  der zu  $\mathcal{O}_S^n$  assoziierte lineare Raum über  $S$ . Dann sind Multiplikation und Einheit von  $X$  nach Satz 12.4.1 gegeben durch die gewichtete Multiplikation vom Typ  $(1, \dots, 1)$  und dem Nullschnitt  $e_{\mathbb{C}^n \times S}$ . Es bleibt somit zu zeigen, dass  $\text{Specan}(\alpha_{\mathbb{S}(\mathcal{O}_S^n)}) = \alpha_{\mathbb{C}^n \times S}$  ist. Dies folgt aus Korollar 5.4.2, denn für  $i = 1, \dots, n$  gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{\mathbb{C}^n \times S}(z_i) &= \tilde{\alpha}_{\mathbb{C}^n \times S}(\tilde{p}'_1(z_i)) = \tilde{p}_1 \circ \tilde{\alpha}_{\mathbb{C}^n}(z_i) = \tilde{p}_1(z_i \circ \alpha_{\mathbb{C}^n}) \\ &= \tilde{p}_1(z_i + z_{i+n}) = z_i + z_{i+n} \\ &= \xi_{\mathbb{C}^{2n} \times S}^b(t_i \otimes 1 + 1 \otimes t_i) = \xi_{\mathbb{C}^{2n} \times S}^b \circ \alpha_{\mathbb{S}(\mathcal{O}_S^n)}(t_i) \quad \square \end{aligned}$$

Ein linearer Raum  $X$  über  $S$  heißt *darstellbar*, wenn es für alle  $s \in S$  eine Umgebung  $U$  von  $s$  und ein  $n \in \mathbb{N}$  gibt, so dass die Restriktion von  $X$  auf  $\pi^{-1}(U)$  isomorph zu einem linearen Unterraum des trivialen  $n$ -dimensionalen linearen Räumes über  $U$  ist.

SATZ 14.6.2. *Jeder lineare Raum über  $S$  ist darstellbar.*

*Beweis.* Sei  $X$  ein linearer Raum über  $S$ . Nach Satz 14.5.3 können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $X = \text{Specan}(\mathbb{S}(\mathcal{E}))$  ist, wobei  $\mathcal{E}$  ein kohärenter  $\mathcal{O}_S$ -Modul ist. Da es sich um eine lokale Aussage handelt und  $\mathcal{E}$  kohärent ist, können wir außerdem annehmen, dass es einen Epimorphismus

$$\varphi: \mathcal{O}_S^n \longrightarrow \mathcal{E}$$

von  $\mathcal{O}_S$ -Modul gibt, so dass  $\ker \varphi$  von endlich vielen globalen Schnitten erzeugt wird. Gemäß Satz 14.6.1 ist  $\text{Specan}(\mathcal{O}_S^n) = \mathbb{C}^n \times S$  der triviale  $n$ -dimensionale lineare Raum über  $S$  und  $\mathbb{S}(\varphi): \mathbb{S}(\mathcal{O}_S^n) \rightarrow \mathbb{S}(\mathcal{E})$  ist epimorph [BA, III, § 6.2, Proposition 4, S. 499]. Die Abbildung  $\varphi$  induziert somit einen Morphismus

$$\text{Specan}(\mathbb{S}(\varphi)): X \longrightarrow \mathbb{C}^n \times S$$

von linearen Räumen über  $S$ , welcher nach Satz 5.4.3 eine abgeschlossene Einbettung ist.  $\square$

## Literaturverzeichnis

- [AF] R.C. Gunning and H. Rossi. *Analytic Functions of Several Complex Variables*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1965.
- [AM86] R. Axelsson and J. Magnusson. Complex Analytic Cones. *Math. Ann.*, 273:601–627, 1986.
- [AS] H. Grauert and R. Remmert. *Analytische Stellenalgebren*. Unter Mitarbeit von O. Riemenschneider, volume 176 of *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, 1971.
- [BA] N. Bourbaki. *Algebra*, volume I+II. Elements of Mathematics. Springer-Verlag, 1989/1990.
- [BAC] N. Bourbaki. *Commutative Algebra*. Elements of Mathematics. Springer-Verlag, 1989.
- [BGT] N. Bourbaki. *General Topology*, volume I+II. Elements of Mathematics. Springer-Verlag, 1989.
- [CAG] G. Fischer. *Complex Analytic Geometry*, volume 538 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1976.
- [CAS] H. Grauert and R. Remmert. *Coherent Analytic Sheaves*. Springer-Verlag, 1984.
- [EGA] A. Grothendieck and J. Dieudonné. *Éléments de géométrie algébrique I*, volume 166 of *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, 1971.
- [EIS] D. Eisenbud. *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1995.
- [Fis66] G. Fischer. Eine Charakterisierung von holomorphen Vektorraumbündeln. *Bayer. Akad. Wiss., Math.-Natur.Kl., S.-B.*, pages 101–107, 1966.
- [Fis67] G. Fischer. Lineare Faserräume und kohärente Modulgarben über komplexen Räumen. *Arch. Math.*, 18:609–617, 1967.
- [Gra62] H. Grauert. Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen. *Math. Ann.*, 146:331–368, 1962.
- [HFCM] K. Fritzsche and H. Grauert. *From Holomorphic Functions to Complex Manifolds*, volume 213 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 2002.
- [HFSV] L. Kaup and B. Kaup. *Holomorphic Functions of Several Variables*, volume 3 of *De Gruyter studies in mathematics*. De Gruyter, 1983.
- [HiSt] P.J. Hilton and U. Stambach. *A Course in Homological Algebra*, volume 4 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 2nd edition, 1997.
- [Hou61] C. Houzel. Géométrie analytique locale, II.: Théorie des morphismes finies. *Séminaire Henri Cartan*, 13ième année(19), 1960/1961.
- [ICA] M.F. Atiyah and I.G. MacDonald. *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley Series in Mathematics. Addison-Wesley Publishing Company, 1969.
- [LAG] T. de Jong and G. Pfister. *Local Analytic Geometry*. Vieweg, 2000.
- [LB68] S. Mac Lane and G. Birkhoff. *Algebra*. The MacMillan Company, 1968.
- [Mac71] S. Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1971.
- [MHA] S. I. Gelfand and Yu. I. Manin. *Methods of Homological Algebra*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, 2nd edition, 2003.
- [PR94] T. Peternell and R. Remmert. Differential Calculus, Holomorphic Maps and Linear Structures on Complex Spaces. In *Several Complex Variables VII*, volume 74 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, pages 97–144. Springer-Verlag, 1994.
- [Pri68] D. Prill. Über lineare Faserräume und schwach negative holomorphe Geradenbündel. *Math. Z.*, 105:313–374, 1968.

- [Rem94] R. Remmert. Local Theory of Complex Spaces. In *Several Complex Variables VII*, volume 74 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, pages 1–96. Springer-Verlag, 1994.
- [Sch70] Schubert. *Kategorien I*. Springer-Verlag, 1970.
- [SGA3] M. Demazure and A. Grothendieck. *Schémas en Groupes (SGA3)*, volume 151/152/153 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1970.
- [TCF] I. Bucur and A. Deleanu. *Introduction to the Theory of Categories and Functors*. Pure and Applied Mathematics. John Wiley & Sons, 1968.
- [TCGA II] A. Grothendieck. Techniques de construction en géométrie analytique, II.: Généralités sur les espaces annelés et les espaces analytiques. *Séminaire Henri Cartan*, 13ième année(9), 1960/1961.
- [TCGA III] A. Grothendieck. Techniques de construction en géométrie analytique, III.: Produits fibrés d'espaces analytiques. *Séminaire Henri Cartan*, 13ième année(10), 1960/1961.
- [TCGA IV] A. Grothendieck. Techniques de construction en géométrie analytique, IV.: Formalisme général des foncteurs représentables. *Séminaire Henri Cartan*, 13ième année(11), 1960/1961.
- [TCGA V] A. Grothendieck. Techniques de construction en géométrie analytique, V.: Fibrés vectoriels, fibrés projectifs, fibrés en drapeaux. *Séminaire Henri Cartan*, 13ième année(12), 1960/1961.
- [TDTE II] A. Grothendieck. Techniques de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, II.: Le théorème d'existence en théorie formelle des modules. *Séminaire Bourbaki*, 12e année(195), 1959/1960.
- [Tra96a] G. Trautmann. *Geringte Räume - Kurzschrift*. Fachbereich Mathematik der Universität Kaiserslautern, 1996.
- [Tra96b] G. Trautmann. *Grundbegriffe der Garbentheorie - Kurzschrift*. Fachbereich Mathematik der Universität Kaiserslautern, 1996.
- [TSR] H. Grauert and R. Remmert. *Theorie der Steinschen Räume*, volume 227 of *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, 1977.
- [ZS] O. Zariski and P. Samuel. *Commutative Algebra*, volume I+II. D. Van Nostrand Company, 1960.

## **Erklärung**

Hiermit versichere ich, dass ich die Diplomarbeit ohne fremde Hilfe selbstständig verfasst und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Hamburg, 22. Dezember 2004

Jan Eric Hoffmann